DEL CAVALLO

DEGLI SCACCHI

PER OPERA

DI TEODORO CICCOLINI

MARCHESE DI GUARDIAGRELE.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, Nº 55.

1836

Le linee si dividono in rette ed in curve; combinandole formasi una terza linea la quale dicesi spezzata mistilinea : pertanto retrocedendo come fra le mistilinee e le curve insorgono le curvilinee così fra le curve e le rette insorgono le rettilinee che si dicono anche spezzate senza altro aggiungere. Di una qualità di queste ultime intendesi brevemente di trattare. Desse sono con parzialità coltivate specialmente se riduconsi a produrre i poligoni. Che se in tale stato si dimentica e ti trascura l'origine mentre, non essendo ne la retta ne la curva, si manifesta quasi imperfetta, non si deve prestar fede ad una tale apparenza. Si sa principalmente quanto vantaggio apportarono alle curve quantunque con calcolo per verità ben astruso di piccolezza senza limiti, infinita. Che se meglio conoscere si voglia soltanto il carattere di una operazione geometrica, avviene che le spezzate stesse negli stessi poligoni favoriscono all' intento. Così se, per esempio, si abbassi una normale dall' angolo retto di un triangolo rettangolo non si ha che divisione del primo in due simili al primo : ma potendosi continuare simili divisioni, si vede che in sostanza, quandanche non si rifletta alla possibilità di operare in ogni senso, non trattasi che di una spezzata la quale procede con data legge fino a zero avendo due lati del triangolo primitivo per limiti del suo per così dire moto ad ogni istante meno spazioso e che si perde nell' immaginazione e che tende con sempre maggiore grandezza all' infinito se si operi in senso inverso giacchè non si esce dai mentovati limiti. Si osservi ancora come le spezzate servano a dare unità geometrica. Per esempio la tangente e la secante compariscono cose disparate nel circolo : frattanto per maggiore chiarezza si prenda non più che un punto della circonferenza per luogo di principio e di ritorno continuo di una spezzata formata da una corda la quale protratta come base fuori del circolo e piegata in seguito in angolo retto forma un rettangolo di qualsivoglia altezza e che si riproduce mediante corde sempre minori le quali partono

dallo stesso punto da cui risulterà una spezzata in certo modo centralizzata. Col riferito andamento l'arco per l'eguale curvatura è diviso a metà dalla tangente se questa per caso dal rettangolo fu prodotta e giungerà infine ad essere zero e zero la corda, ed il rettangolo mediante il quarto lato si confonderà col diametro: ma intanto siccome le corde furono protratte in qualità di secanti succede che la tangente nel punto di centralizzazione è la secante medesima normale al diametro giacchè in esso rimane del pari il centro di curvatura: nel tempo stesso la base del rettangolo divenuta tangente sarebbe zero se la secante non fosse niente più che la corda, osservazione che addimostra l'intimo rapporto della secante colla tangente per effetto del rapporto fra il diametro la corda e l'arco e di tutto ciò essendo legame e fondamento la spezzata rettangolare. Ma non ad altra qualità delle rettilinee si divisò di attendere che alla prodotta dal moto del cavallo degli scacchi allorquando con i suoi salti i quadrati tutti dello scacchiere ad uno ad uno percorre. Ne dire si potrebbe, se pur alla fisica l'investigazione enunciata si bramasse applicare, che non si avrebbe immediata lusinga. Così la linea generata in sì fatta guisa nello spazio tutti occupandone con andamento intralciato ma prefisso gli spazi elementari sembra unirli con altra legge ben diversa dall'ordinaria di attrazione: così ancora in meccanica gli angoli di incidenza e di riflessione che si inferiscono dai salti indicati comparirebbero di applicazione non infertile. Peraltro non solamente non si ha in mira di penetrare in tali lucubrazioni ma inoltre si ragionerà sull'argomento nella maniera che le linee ed i numeri offrono la più simplice. Del resto il presente lavoro non fu intrapreso che per divagamento in una costante meditazione la quale tendeva a trovare la macchina del moto intrinsecamente continuato o come abusivamente si dice, macchina di moto perpetuo, invenzione a cui pervenni; onde l'opuscolo stimolato dalla sua compagna aderì a non rimanere totalmente ignoto.

Nel giuoco degli scacchi si ha come cosa indispensabile la varietà della forma dei pezzi che lo compongono poichè diversa legge di moto a percorrere lo scacchiere ad ogni diverso pezzo fu attribuita. Devonsi qui rimarcare soltanto i moti dell' *alfiere* e dell' altro pezzo a cui si da il nome di *torre*. A tal fine pongasi mente al modo di adesione fra esse delle caselle dello scacchiere, e si vedrà che l'una all' altra è contigua o mediante un angolo, il che forma di casella in casella un cammino sulla retta formata dal contatto delle diagonali, o mediante un lato, il che forma di casella in casella un cammino fra due parallele. Il primo di tali moti fu attribuito al alfiere per quanti passi o meno di quanti passi è possibile, il secondo alla torre e colla stessa legge. Fu combinato l'uno con l'altro moto per attribuirlo al pezzo che ha forma e

nome di *cavallo*, ma la combinazione fu la più semplice, poichè fu composto del passo il più corto dell' alfiere e del passo il più corto della torre, o vice versa il che è chiaramente la medesima cosa, così che risultò che il passo del cavallo degli scacchi è sempre il medesimo o per meglio dire della medesima dimensione. Per definire pertanto il moto del cavallo potrà dirsi che consiste nel passaggio d' una ad un' altra casella saltando le due che sono intermedie alle altra due e che sono con l'una e con l'altra di esse e fra loro stesse in contatto. Si conosce adunque che geometricamente parlando il salto del cavallo degli scacchi è una retta che dal centro di un quadrato va al centro di un altro quadrato eguale ed in modo o vice versa, a formare con la lunghezza di due lati la lunghezza e con un lato l'altezza di un rettangolo di cui diviene la diagonale per cui più esplicitamente può dirsi che è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di altezza doppia della base. Che se facciasi poi attenzione alle diagonali delle caselle o piccoli quadrati si vede che il triangolo rettangolo diviene di altezza

tripla della base poichè è formato di una diagonale e mezza dei piccoli quadrati. Questa seconda maniera deve oltremodo fissare l'attenzione poichè dovendosi considerare il salto del cavallo soltanto nel caso in cui può ad una ad una occupare le 64 caselle se ne ottiene di occuparne 4 in forma di losanga nella 4ª. parte di quadrato o quarta parte dello scacchiere. Ne peraltro si potrebbe trascurare il primo triangolo vale a dire quello di altezza doppia della base poichè si vede in primo luogo che mediante esso il salto del cavallo giova ad escire dalla losanga senza escire dal quarto di quadrato, e che in secondo luogo sommando il vertice del detto triangolo col vertice dell' altro si hanno chiaramente 45 gradi di maniera che apprendesi che due salti di cavallo i quali partono da un medesimo punto possono formare anche l'angolo di 90 o retto. Adunque nel quarto di quadrato oltre la losanga si ottiene un quadrato della medesima lunghezza di lati e non solamente in ciascuna quarta parte dello scacchiere si potranno ripetere e perciò alternare le due figure geometriche ma inoltre con l'alternazione di due losanghe

e due quadrati e di due quadrati e due losanghe si potranno rendere successivi i 31 salti in aspetto elegante come si può osservare nella tavola 1ª. Empita con tale primitiva e fondamentale operazione la metà del numero delle caselle dello scacchiere pongasi mente alla disposizione in certo modo simmetrica dei 31 salti e sarà piacevole di apprendere che une seconda tavola [v. la 2ª. tav :] sarà permesso di formare procedendo collo stesso metodo della prima e così senza aver bisogno nel giro di alcuna delle 32 caselle già occupate, occupare le 32 rimanenti. Gioverà inoltre combinare le due tavole per vedere l'intreccio che occupando l'intero scacchiere dalle due operazioni riunite risulta [v. t. 3ª.] nel formare 62 salti del cavallo divisi in due parti di 31 salti per ciascuna. Formato così l'intero giro dello scacchiere ed avendosi interruzione di salti di cavallo dall' una all' altra metà del numero totale delle caselle si è ben lungi o almeno sembra di essere ben lungi dall' evitare la detta interruzione a fine di percorrere le 64 caselle consecutivamente con una sola spezzata risolvendo per tal modo geome-

tricamente il problema dei 63 salti successivi e diversi. Frattanto sembra opportuno di osservare che non si è formata la seconda spezzata a cagione che la prima non poteva continuarsi o che almeno continuandola non presentava indizj di buon successo, ma si è avuto in mira di non trascurare della prima un' imitazione che si presenta a colpo d' occhio. È ben vero che non poteva continuarsi ricominciando nel primo quarto di quadrato ma se in vece si va al secondo apparisce si può continuando fare altrettanto nel solo primo quadrato. Inoltre da questo passando al quarto quadrato è duopo lasciar ivi non occupata la losanga ma immediatamente si vede che occorre occupare precedentemente ad essa la losanga del terzo e così si ha felicemente e senza alcuna incertezza il quadrato del terzo per finale della spezzata, e così rimangono adempiti in modo successivo come volevasi i 63 salti e per conseguenza occupate le 64 caselle. Deve osservarsi in primo luogo che tutto ciò vale a dire l'intero giro si ottiene col fare eccezione all' alternazione di losanghe e quadrati soltanto dopo

le 16 prime caselle: in secondo luogo è di importanza fondamentale l'osservare che mentre non si cercava che l'intero giro e così risolvere il problema dei 63 salti successivi e diversi si è presentata spontaneamente la soluzione dell' altro più elegante problema dei 64 salti successivi e diversi, vale a dire allorchè l'ultimo salto va ad occupare la prima casella e così rendendo la spezzata rientrante in se stessa la produce senza termine e senza principio come nella T. 4ª. Provveduto per tal modo all' intero giro mediante le due sole figure geometriche del quadrato e della losanga si è non solamente avverata in maniera semplice e chiara la possibilità del detto giro, ma inoltre il fin qui detto ci fa riguardare come cosa già ottenuta, e che per ciò rende superfluo di qui addure precisa locuzione di geometria, la rigorosa e geometrica dimostrazione dei 64 salti del cavallo degli scacchi. Per corredare invece con qualche osservazione le cose esposte pongasi mente alle rette che si formano ed agli angoli che ne risultano. I salti del cavallo presentano in qualsivoglia caso o una linea retta, o uno linea retta multipla della prima, o uno

di due angoli ottusi, o uno di due angoli acuti, o uno di due angoli retti e sempre con lati eguali o multipli della retta prenunciata: di maniera che non ometteremo di riferire che se per un istante si volesse immaginare in ciascun quadrato unità elevato un piano in guisa che un corpo elastico urtando in esso dovesse o parte o tutti percorrere i quadrati unità anche in caso di ritorno al punto di sua partenza, a ciò ottenere soli cinque modi diversi nella disposizione dei piani relativamente al punto di ciascuna partenza sarebbero sufficienti per avere ogni angolo di incidenza e riflessione, che anzi i modi ridurrebbonsi a tre: infatti apparisce che la base del piano sarebbe parallela a due lati del quadrato unità per la losanga più corta, sarebbe sulla diagonale di esso per l'altra losanga, e nel caso poi d'angolo rettangolo d'incidenza e riflessione la detta base dovrebbe essere compresa fra le altre due. A schiarimento di questo terzo caso sia, per esempio, in 4 (T. 7ª.) l'angolo retto di incidenza e riflessione, i lati dell' angolo detto termineranno in 41 e in 3, ed intanto vedesi che è composto

dei due acuziangoli diversi dellè losanghe, così che, come è noto, un acuziangolo all' altro è complemento: in seguito se per bipartire i 90 gradi si immagini condotta dal centro del quadrato 4 una retta non solo dessa dovrà essere compresa nell' acuziangolo più grande 5, 4, 3, ma di più passerà per i punti d'incontro dei quadrati 42, 2, il che facilmente si conosce immaginando condotta dal centro suddetto del quadrato 4 una seconda retta che vada ai punti d'incontro dei quadrati 47, 1: si concluderà pertanto che la base o retta di cercata posizione è una diagonale del parallelogrammo formato dai quadrati 47, 4, 43. Non ometteremo inoltre di aggiungere come mentre l'alternare gli acuziangoli delle losanghe non darebbe che il giro o spezzata chiusa ed a forma stellata degli otto numeri circostnati ad uno, combinando gli ottusiangoli e gli angoli retti formerebbesi un esagono: alternando poi gli ottusiangoli nascerebbe una spezzata chiusa di salti di cavallo in forma di ottagono nel quale vedrebbesi che gli angoli più grandi sono tali a motivo che hanno dal centro dell' ottagono la distanza di

sole due diagonali del quadrato unità (T. 5ª, T. 6ª). Ma lasciando tali geometriche considerazioni or che sono state trovate con esse i 64 salti e di geometrica evidenza provveduti sarà opportuno di sostituire i numeri alle linee cosicchè scritta l'unità nella casella di principio si avrà il numero 2 nella seconda o primo salto, il numero 3 nella terza o secondo salto e così in seguito; ed in tal guisa nella 64ma o 63mo salto si dovrà scrivere 64 per ultimo numero come nella tav: 8ª. Per tanto 64 numeri occuperanno in modo promiscuo tutto lo scacchiere, e la serie dei numeri naturali a motivo degli angoli di incidenza e riflessione che la formano può dirsi serie riflettente la quale vedesi portar qualche rimedio al difetto di mancanza di continuità nell' ordinaria disposizione di numeri in tavole, per non dire alla languida monotonia di distribuzione : ne potrebbe non giovare la varietà nella detta distribuzione poichè apre un campo di investigazione nella teoria dei numeri in tavole o superficie. Qui poi come più opportuno all' intento pongasi mente alla situazione alternativa di numeri dispari e pari che

involontariamente presentasi in tutto lo scacchiere. A tal uopo si conosce che per andare da una casella ad un' altra contigua alla prima mediante un lato si avranno numeri impari e pari alternativamente per tutto il giro ma i salti saranno di numero sempre impari giacchè un numero pari deve essere sempre scritto nell' ultima casella a motivo della sua situazione relativamente alla prima casella. Ed infatti il salto del cavallo degli scacchi secondo la sua definizione produce un numero impari ed un numero pari in situazione favorevole alla distribuzione alternativa di impari e pari sullo scacchiere il quale essendo d'ordinario disposto in alternazione di caselle bianche e nere può colle due qualità rappresentare le due altre di numeri. Ne si può immaginare che gli angoli derivanti dalle tre figure geometriche, cioè due losanghe e un quadrato, possano talvolta pregiudicare all' alternazione, tali angoli derivando dalla data definizione. È conseguentemente impedito di disporre due salti di cavallo in triangolo, e così alterare l'alternazione. In sostanza nella

serie di numeri ordinarj e perciò alternativi che si forma col giro ideato potrebbe avere ostacolo la situazione di un numero o per se stessa o per quella di alcuno dei precedenti: al primo caso osta la definizone, al secondo il legame per ipotesi successivo di alternazione e di geometrica disposizione; in maniera che l'ultimo numero cercato sarà pari qualunque siasi il giro anche se vogliasi tornare talvolta a qualche casella già occupata: del resto vedrebbesi di fatto che è pari mediante il minor numero possibile di tre salti vale a dire di quatro soli termini della serie naturale: pertanto da una casella non si può andare ad un' altra contigua alla prima mediante un lato, che nel caso di un numero impari di salti, come un numero pari condurrebbe ad un' altra contigua alla seconda mediante un lato; quindi i numeri pari e così pure gli imparisi succedono solamente lungo le diagonali delle caselle il che da l'alternazione di impari e pari o vice versa tanto nei ranghi orizzontali che nei perpendicolari dello scacchiere. Ciò premesso e riguardato come bastantemente dis-

cusso mediante la geometria il giro di 64 salti si rifletta che si è trovato allorchè solo 63 si avevano in mira, quindi si torni a tale primitiva ricerca or che i numeri adoprati invece di linee offrono di renderla abondantemente profittevole. E realmente vedesi in un subito come possa permutarsi l'ultima casella, poichè da 64 potendosi saltare, per esempio, a 11, a 25, etc. è cosa evidente che si avrà per terminare a 11 il giro 1 a 11, 64 a 12, e per terminare a 25 il giro 1 a 25, 64 a 26: ma conviene risolvere in suo più vasto senso il problema proponendo di cominciare in qualsiasi casella ed in qualsiasi terminare fatto il giro totale dello scacchiere. Intanto si sa che è cosa sufficiente il fissare il principio negli impari e che dovendosi moltiplicarli in 32 si trovano 1024 casi possibili e tutti diversi almeno in apparenza. Si sa pure che un punto situato in una delle due diagonali di un quadrato ha tre altri punti in situazione analoga: che non deve dirsi lo stesso di un punto che non sia in una diagonale o ad egual distanza delle due, poichè intal caso il punto ne ha

7 in situazione analoga. Conseguentemente e dovendosi escludere la metà dei 64 numeri giacchè sono pari, ne risulta che dei 32 impari gli otto sulla diagonale si riducono a 4 ed i 24 restanti si riducono alla 4ª. parte cioè a 6 : pertanto presi per regolarità tali 10 numeri in una quarta parte di quadrato formata da due mezze diagonali, si otterranno, se vuolsi, per tutti i casi possibili di principio i seguenti della tavola 1, 47, 45, 3, 49, 7, 43, 29, 59, 27. Ridotti a 10 i principj conviene moltiplicar 10 per 32 ed i 1024 casi non sono ora più che 320. Ma si ha ancora altra riduzione : ed infatti in primo luogo ai 4 numeri in diagonale 1, 47, 45, 3 non appartengono che 64 numeri di finale cioè 16 per ciascun principio essendo simmetrici i 64 rimanenti ed evidentemente superflui : in secondo luogo si torni di nuovo a considerare la situazione analoga dei numeri, ma prima si è avuto riguardo agli impari relativamente agli impari, qui poi deve aversi riguardo agli impari relativamente ai pari. Infatti è chiaro che trovato, per esempio, il giro di 1 a 10 è inutile di cercare il giro di

45 a 40 giacchè 45 è in situazione analoga a 10 come 1 è in situazione analoga a 40 : e per i numeri che non sono nella diagonale, se si conosceranno, per esempio, i 4 giri di 59 a 42, a 6, a 20, a 62 numeri pari analoghi all' impari 27 apparirà superflua la ricerca dei 4 giri di 27 a 46, a 48, a 22, a 24 numeri pari analoghi all' impari 59. Per conseguenza se procedasi nell' ordine indicato 1, 47, 45, etc. ad 1 apparterranno 16 finali, a 47 15, a 45 14, a 3 13, a 49 24, a 7 20, a 43 16, a 29 12, a 59 8 a 27 4 142 casi in tutto; il che equivale ad ammettere per ciascun principio le finali analoge a quei che lo seguono, ad ammettere in modo inevitabile le analoghe al detto principio non avendosi sostituzione di due altri numeri, ed a togliere infine le analoghe ai principj precedenti. Avendo così giovato in secondo luogo alla riduzione rimane in terzo luogo un' altra osservazione per condurla a compimento. E realmente l'analogia di situazione si è considerata soltanto rapporto alla simmetria ed alla sostituzione di due altri numeri estremi, ma può sostituirsi al numero finale anche senza simmetria quan-

tunque ciò non apparisca a colpo d'occhio. Infatti se scelgasi, per esempio, 27 sarà la stessa cosa il terminare a 42 ovvero a 62. Si può adesso stabilire il numero preciso dei casi opportuni che da 142 riduconsi finalmente a 136 cioè a 115 casi di 63 salti, posti separatamente 21 casi di 64 salti. Conseguentemente per qui inserire non tutti i casi immaginabili ma quelli nei quali sono circoscritti ed ai quali conviene aver riguardo come realmente diversi si potrà formare l'elenco seguente. Da 1 a 42, a 20, etc. Da 47 a 20, a 22, etc. etc. etc. Somma 115. Da 1 a 2, a 14, etc. etc. etc. Somma 21. In tutto 136. Per quanto i giri sieno in tal modo ristretti a ben minor numero di quel che appariva rimane nonostante una folla di condizioni alle quali necessita potersi soddisfare se il problema in ogni incontro devesi ammettere come possibile. Prima adunque di passare alle soluzioni ad una ad una, si esamini a fine di facilitarle qualche generalità che nel loro insieme non saprebbero mancar di presentare. Qualunque siasi l'origine, qualunque il compimento pres-

critto, se tali due numeri estremi non sieno naturalmente consecutivi fra loro, dall' uno all' altro si passerà mediante due spezzate in nessuna parte identiche, cioè mediante due serie riflettenti che non hanno alcun termine eguale. Per un qualche esempio se da 1 si vada a 38 si avrà la riflettente diretta 2 a 37, e l'inversa 64 a 39, trascurando così come così più chiara i due termini estremi comuni alle due serie. Giova molto il considerar così in due parti distinte e risultanti dai 64 salti l'intero giro dello scacchiere relativamente a due numeri fissi. Il più semplice dei ripieghi che ne risulta per servire alle soluzioni cercate, consisterà chiaramente in non dipartirsi dalle due dette serie e in tal modo condurranno esse ad effetto favorevole se dal primo o dall' ultimo termine dell' una si potrà aver passaggio all' ultimo o al primo dell' altra. Così se cominciando in 43 vogliasi terminare in 24 si trova che l'ultimo termine 25 della riflettente inversa combina col primo 44 della diretta : quindi mediante le due sole 43 à 25

e 44 a 64, 1 a 24 si perviene alla soluzione bramata la quale consiste nel giro, serie composta o formula 43 a 25, 44 a 64, 1 a 24. Un altro ripiego ben semplice ma che peraltro aggiunge una serie dividendo in due una delle due, consiste pertanto nell' interporne una mediante il primo e l'ultimo suo termine fra due termini dell' altra: così per ottenere l'intero giro di 27 a 6 potendosi interporre la riflettente inversa 26 a 7 fra i numeri 31 e 32 della diretta apparisce all' uopo la formula 27 a 31, 26 a 7, 32 a 64, 1 a 6. Quando si ha una spezzata chiusa, o riflettente di termini estremi in combinazione, risulta elegante maniera di pervenire all' intento, siccome per qualsiasi coppia i termini consecutivi della serie in tal guisa priva di origine addivengono estremi nell' opportunità. Vogliasi avuto principio in 49 aver fine in 28. L'inversa 48 a 29 è, come vedesi, una spezzata o riflettente chiusa: ma presa come serie diretta da 34 a 48 e passando mediante 48 al residuo di essa divenuto pure serie diretta, 33 e 34 saranno opportuni numeri interposti

fra 63 e 64 della riflettente non considerata e diretta 50 a 64, 1 a 27. Tali 4 riflettenti danno immediatamente la cercata soluzione 49 a 63, 34 a 48, 29 a 33, 64, 1 a 28. Nel seguente esempio di 43 a 46 non compariscono che tre sole serie giacchè non si ha interposizione ma si aggiunge il termine finale 46 al 47 e se ne forma una serie inversa da due dirette preceduta : per la qual cosa si ottiene 43 a 45, 48 a 64, 1 a 42, 47 a 46. Talvolta si approfitta della figura geometrica della losanga o del quadrato giacchè nei quattro termini che ne risultano il primo col quarto combina ed in tal guisa emerge una nuova serie e permutazione nell' ordine delle cifre. Serva l'esempio 43 a 56 il quale con 5 serie presenta la composta 43 a 44, 59 a 57, 60 a 64, 1 a 42, 47 a 45, 48 a 56. Anche senza l'uso delle losanghe e quadrati si suddivide vale a dire si formano più serie colle due fondamentali e si inverte all' uopo. Conseguentemente se da 45 vadasi a 2 si incontra la composta 45 a 34, 63 a 46, 33 a 26, 1, 64, 25 a 2. Nell' esempio 7 a

1, 64 a 53, 8 a 18, 23 a 19, 52 a 24 vedrebbesi chiaramente combinato il ripiego di inserire una serie fondamentale fra due termini dell' altra con ciò che si è detto precedentemente, vale a dire col suddividere ed invertere. In generale può dirsi che il suddividere invertendo o non invertendo forma la conseguenza ed il sostegno dei ripieghi precedentemente esposti i quali altrimenti sarebbero spesso insufficienti e non entrerebbero in combinazione fra loro. Per riportare altro esempio nel seguente non solo si avrà quanto nel precedente ma di più vi comparirà adoprata la losanga. Infatti 49 conduce a 20 mediante 49 a 52, 21 a 33, 46 a 48, 45 a 34, 53 a 64, 1 a 20. Tali sono i ripieghi tale il sistema che adottato non solamente conduce con facilità e quasi a colpo d'occhio alla formazione di tutte le 136 formule, ma inoltre in detta ricerca non si ha d'uopo in nessuno dei casi di oltrepassare il numero ben ristretto di 6 serie. A tale oggetto si consultino le tavole 9, 10, 11, 12 le quali palesano tutte le bramate soluzioni. Non è forse su-

perfluo di aggiungere che le dette formule si potrebbero anche per mezzo di linee rette rappresentare in guisa che se non ne risultasse vantaggio nel formare le une colla scorta delle altre, risulterebbero per lo meno visibili gli usati ripieghi in modo istantaneo e più generale : si porrebbe a tale oggetto una linea retta nella stessa direzione di alcuna delle precedenti solo allorquando dovesse considerarsene come semplicemente staccata a motivo di numeri che naturalmente fra loro succedevansi. Per maggiore chiarezza vogliasi interprendere il giro di 43 a 6; comparirà la formula 43 a 41, 44 a 49, 40 a 7, 50 a 64, 1 a 6 che sarà pure espressa e contenuta nelle 4 seguenti rette alternative ═ ═ : darebbe invece la formula 49 a 40, 17 a 8, 39 a 18, 57 a 64, 1 a 7, 50 a 56 le rette ═ ═ : se poi abbiasi l'esposta 7 a 1, 64 a 53, 8 a 18, 23 a 19, 52 a 24 si pone ═══ protraendo la terza linea ne più ne meno della seconda se vuolsi indicare che all' ultimo numero della 2ª. serie aderisce regolarmente l'ultimo

della 3.ª. Da ciò deducesi facilmente che rapporto alle losanghe e quadrati esprimendo tre numeri con una retta più corta, l'addotta formula di 43 a 56 è rappresentata mediante : e finalmente se vogliosi ammesso il punto per indicare il numero unico di una serie, in cui tutti gli altri sono zero, preso il giro di 29 a 24 si otterrà la figura invece dei numeri 29 a 64, 25, 28 a 26, 1 a 24. Ma poco sarebbe l'aver soddisfatto in modo semplice e spedito a tutti i 136 casi, poco sarebbe l'aver riconosciuta come possibile la soluzione del problema per qualunque siasi casella di origine e di termine, se di tale possibilità ritrovata, per così dire, a caso non emergesse con matematica rigidezza la dimostrazione. Apparirà pertanto come cosa indispensabile di intraprendere ad esaminare e ad effetto se non per altro di semplice esperimento la formula generale 1 a 64 dalla quale si è già veduto emanare qualche altra soluzione del problema in modo evidente e spedito. Si sa infatti che 64 mediante i numeri circostanti, con i quali combina, 11, 23, 25, 33, 37, 61

conduce alle formule o giri di nuova finale, 1 a 11, 64 a 12, 2°. 1 a 23, 64 a 24, 3°. 1 a 25, 64 a 26, e così in seguito alle finali 34, 38, 62: è cosa evidente che può a motivo dei numeri estremi 1, 64 che sono in combinazione aggiungersi la formula 1, 64 a 2. E relativamente al detto caso di numeri estremi di combinazione non saprebbesi non riguardare come cosa opportuna per agevolare la dimostrazione cercata il diminuire di essa l'impaccio con dichiarare immediatamente come evidenti le soluzioni citate di combinazione delle quali è pure evidentemente la prima trovata la formula 1 a 64. Ed in realtà se si consideri che i 64 salti del cavallo sono circoscritti in 21 casi diversi, come vedesi nella 12ª tavola, e che si è qui sopra soddisfatto a colpo d'occhio al caso della finale 12 in detta tavola contemplato, e che di soli tre altri casi 49 a 4, 49 a 8, 7 a 2 che ivi ammettono esame non se ne ha qualcheduno che non sia di facilità somma ed immediata, si comprenderà che i numeri estremi in combinazione dieno bentosto soluzione evidente. Premessa dunque tale proposizione che si vedrà utile tornisi alle formule 1 a 11,

64 a 12, 2ª. 1 a 23, 64 a 24, etc. e si osservi che nello stesso modo in cui sono dedotte dalla generale, altre si deducono dalle medesime. Così a motivo dei sei numeri impari che oltre l'uno e l'altro impari immediato combinano con 12 si ottengono le nuove sei formule 1, 12 a 64, 11 a 2, 2ª. 1 a 9, 12 a 64, 11 a 10, 3ª. 1 a 11, 64 a 17, 12 a 16, etc. proseguendo se vuolsi per regolarità in ordine progressivo mediante 35, 41, 53, il che si è fatto anche precedentemente giacchè la serie inversa 1, 64 a 2 si pretermette per cominciare in seguito altro complesso di formule se occorre allorchè si è compito il numero delle derivanti dalla serie diretta. Si avverte che intendesi parlare delle derivanti di finale diversa, e così qui sopra non abbiasi in considerazione il 35. È chiaro pertanto come debbasi proseguire nella ricerca delle formule, il che vedesi inoltre nella tavola 13ª. prodotta dal complesso primitivo, vale a dire, della serie diretta. Si osservi nella detta tavola non esistere la formula della finale 4, ma ciò non fa difficoltà a cagione come si è detto dei

64 salti. Conseguentemente sarebbe superfluo di formare la tavola 14ª. se non giovasse a fine di confrontarla colla prima e per osservare come in essa manchino le finali 12, 28 il che peraltro evidentemente non è di pregiudizio ancorchè nel primo complesso non mancasse solamente il 12, ma qualunque altra finale escluso 28. Sebbene un tale procedere addimostri il facile e regolare sviluppo della formula generale non si può in rapporto della cercata dimostrazione aver fiducia nel favorevole ottenuto risultato senza ricorrere a qualche altro esperimento. Se pertanto sulla detta generale o fondamentale 1 a 64 costruiscasi a caso un' altra formula deducendone 57 a 64, 1 a 56 la quale si sviluppi come precedentemente e come vedesi nella tavola 15ª., nascono altre formule derivate, semplici e spedite ma le finali 4 e 28 mancano; e se colla tavola 16ª. si adopri l'inversa 57 a 1, 64 a 58, mancano le finali 4, 12 : dunque il metodo adoprato non fa terminare in 4 col principio 57, dunque non soddisfà alla ricerca della dimostrazione, quantunque fuori di tale circostanza si possa agevol-

mente rimediare alla mancanza siccome non si faticherebbe a trovare 57 a 64, 1, 18 a 56, 17 a 8, 5 a 7, 2 a 4. Sembrerà forse un metodo più diretto ed opportuno il far derivare le formule l'una dall' altra successivamente. Se pertanto riprendasi 1 a 64 e si scriva ovvero si immagini scritta l'intera serie dei numeri componenti la formula avviene che allorquando per avere altra finale ripiegasi, per così dire, la formula in se stessa per rendere successivo il 64 a qualche numero impari corrispondente, la serie chiusa che in tal modo si forma analogamente a quanto si è altrove osservato, diventa una serie inversa in rapporto a quel che era, e la nuova formula in tal guisa prodotta da luogo a ripetere la stessa operazione per ottenere altra formula ed altra finale, e così in seguito. Ma insorge una difficoltà che in primo luogo appartiene ai numeri angolari 30 e 38 i quali comunicando soltanto con gli impari immediati pongono termine alla successione di derivazione. In secondo luogo si rifletta che non basta che al numero finale non manchino gli impari di combinazione che servono a rendere chiusa la serie

facendola ripiegare in se stessa; giacchè il pari a destra e così senza interposizione consecutivo all' impari o può essere un numero il quale, come si è veduto, è stato già reso finale ovvero che è stato già disgiunto per renderlo finale invertendo. Ne si ha dubbio di un tal fatto se si rammenti che un numero oltre il combinare solamente con i due immediati combina talvolta non solamente con uno di più, talvolta con due o con quattro o con sei : da ciò è palese inferirsi che i 32 numeri pari finali devono corrispondere in complesso a 32 impari immediati i quali mediante altre loro combinazioni relative alle finali ad una ad una formano pure in complesso altri 104 impari di combinazione. Qui si osservi almeno di passaggio, che una tal somma 32 più 104, vale a dire un tal numero 136 di corrispondenze in complesso di impari con pari, o vice versa, è lo stesso, già trovato altrove, dei giri dello scacchiere. All' impedimento della continuazione delle derivate si ha peraltro il rimedio di ricominciare un nuovo ordine di derivate e così in seguito quante volte occorra e se ne presenti l'occasione.

A tal uopo si può riprendere la finale 64 seguendo come prima la progressiva grandezza degli impari di combinazione finchè siane esaurita la totalità: nello stesso modo le finali 12, 2, 6, etc. possono offrire successivamente altri principj di ordini di derivate. Ciò nonostante non si soddisfà a tutti i 32 casi, si hanno formule un poco meno semplici che altrove si son date e mancano le finali 4, 28, 36, 56. Coll' inversa 1, 64 a 2 risultano formule più prolisse; e siccome mancano 12 e 36, emerge che la finale 36 non rimane soddisfatta se un tal metodo si adopri. Per seguire l'andamento chiaro del detto metodo pare forse superfluo di riportare alcuna tavola; ciò non ostante oltre la 17ª. si è formata la 18ª. con l'inversa 1, 64 a 2 non tanto per ivi osservare la prolissità delle formule quanto per estrarne la decima invertendola fino alla seconda cifra 64 e dedurne due altre tavole una in linee l'altra in numeri che sono scritti secondo l'andamento della spezzata : in tal modo si hanno in vista i non pochi cangiamenti che risultano nel nuovo giro 1, 18 a 21, etc. 64 col vantaggio se non altro di qualche confronto con l'ordinaria

geometrica forma e numerica disposizione della generale 1 a 64. Fra l'abondanza delle serie prodotte dai due metodi esposti è cosa dispiacente il dover convenire che per una ben tenue mancanza non emani il numero totale dei giri dello scacchiere. È ben vero peraltro che non si è urtato in tale ostacolo che per volere circoscrivere in precisi limiti la quantità di tali giri, e con sì fatta maniera la soverchia fiducia in favorevole risultato condusse a trascurare ubertosissima indagine. Intendesi dire, come è cosa agevole a credersi, della ripetizione delle medesime finali. Il pervenire ad esse dipende infatti, in sostanza, in ultima analisi dalla loro situazione piuttosto a destra che a sinistra degli impari in occasione opportuna. Or non saprebbesi non vedere la somma varietà nata dalle ripetizioni, varietà la quale è ottima garanzia nel dubbio di pervenire alle occasioni mentovate. Non si tace, quantunque facile a prevedere, che gli stessi impari immediati valgono ora in concorso degli altri ad invertere la serie, o porzione di essa, nel atto di cangiare il termine finale. Devesi pure aggiungere qual

cosa indispensabile che se piaccia di far variare anche il termine di principio per ritornare al medesimo, ciò non solo è, come è noto, possibile senza difficoltà, ma inoltre di varietà abondevole quantunque indiretta. È cosa manifesta non esser duopo di aver qui in considerazione la varietà la quale si è altrove esaminata e nata da permutazioni di termini che nella serie esistono come intermedj. Se poi delle ripetizioni, almeno di finale, vogliasi qualche esempio avviene di trovarne ben semplice nella discussa 57 a 64, 1 a 56 in cui le finali si sono inutilmente permutate per ottenerle tutte giacchè il 4 in ogni modo è rimasto escluso. Protraendo le serie a tre sole altre che finiscono in maniera già trovata diventa possibile nella quarta di terminare finalmente con 4. Infatti mediante l'ottenuta ultima 57 a 49, ..., 25 a 1, 64 a 60 si inferisce 57 a 49, ..., 25 a 1, 60 a 64, e poi 57 a 49, ..., 25 a 11, 64 a 60, 1 a 10, e poi 57 a 49, ..., 25 a 15, 10 a 1, 60 a 64, 11 a 14; dunque 57 a 49, 58 a 59, 44 a 45, 48 a 46, 39 a 26, 43 a 40, 25 a 15, 10 a 5, 14 a 11, 64 a 60, 1 a 4 come si voleva. Sembra

non occorrere di altro aggiungere del presente metodo ; nondimeno si è creduto non superfluo il riportare il risultato di qualche applicazione ben vasta avendo ricorso alla contemplata, 1, 64 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 33, ..., 21 a 18. In vece di ammettere subito come prima 64 finale si è a ciò provveduto due volte dopo molte serie finchè dopo 50 di esse di nuovo il 64 comparisce in ultimo luogo con variatissimo giro. L'ordine ammesso nelle serie si deduce da 51 finali nell' ordine

32, 22, 36, 4, 48, 46, 6, 8, 52,
50, 18, 56, 54, 60, 58, 26, 44, 42,
46, 48, 28, 54, 10, 32, 34, 62, 20,
40, 24, 50, 2, 64, 12, 2, 10, 54,
14, 12, 56, 64, 14, 54, 10, 2, 32,
6, 48, 52, 32, 14, 64 mediante le successioni dei 51 impari

31, 15, 37, 41, 49, 45, 47, 7, 53,
49, 31, 57, 53, 61, 57, 25, 43, 41,
47, 45, 29, 61, 11, 15, 21, 63, 21,

17, 25, 31, 7, 1, 11, 1, 9, 11,
15, 1, 53, 63, 1, 15, 11, 9, 33,
7, 47, 49, 21, 15, 1, di qui l'immaginata
1, 14, 5 a 6, 47, 42 a 43, 26 a 28, 61 a 62, 21, 52 a 50, 7, 32, 15, 10 a 8, 53, 12 a 13, 16 a 17, 20 a 18, 57, 60 a 58, 25, 40 a 37, 22 a 24, 31 a 29, 48 a 49, 4 a 2, 33, 46 a 44, 41, 36 a 34, 63, 56 a 54, 11, 64. Non si creda peraltro che siasi del tutto o quasi del tutto operato a caso giacchè non solamente si sono ad arte evitati gli angolari 30 e 38 i quali non danno successione; ma inoltre si è avuto in mira che non rimanesse, prima di desistere, un solo degli altri pari il quale fosse nel tempo stesso in compagnia tanto dell' uno quanto dell' altro degli impari immediati: da ciò apparisce che la prolissa formula infrascritta è singolare addimostrando a colpo d'occhio per il principio unità che a tutti i pari di finale è possibile di soddisfare. Se le finali che mancano inducono a prima vista colla scarsa loro quantità all' idea delle ripetizioni, un' altra osservazione che pure senza

ostacolo si presenta si deve adesso riferire. Laonde se si consideri in ciascuna delle sei tavole ciascuna finale che manca avviene di conoscere che in ogni caso dai due impari immediati non risultano che due o tre pari di combinazione, vale a dire la minor quantità possibile, il 36 per altro eccettuato; nondimeno gli immediati di 36 non pervengono ad oltrepassare cinque pari di combinazione. Ciò premesso rammentisi, per circoscrivere in qualche categoria le dette finali mancanti, che la generale 1 a 64 è tutta ripartita di 4 in 4 numeri a tenore della primitiva forma geometrica di losanghe e quadrati. Succede pertanto che nell' una e nell' altra figura geometrica non si trovano che in quarto luogo, e così per quarto numero dei quattro, le discusse finali: conseguentemente si stabilisce che non solamente non avvi alcuna di esse per secondo dei quattro numeri che compongono ogni losanga e quadrato, ma che inoltre per ogni 2°. degli indicati 4 numeri anche in circostanza la meno favorevole si ottiene almeno la ricerca di tre finali in luogo di una sola. Se per esempio a 54 si brami di aver termine è ma-

nifesto che oltre 54 è sufficiente che si abbia in vece 56 il quale addita subito l'altro pari della geometrica figura; in oltre basta trovare 60 per avere 54 o 56, giacchè si ha la serie non interrotta e diretta o inversa 53, 54, 55, 56, 57. Ammettendo in sì fatto modo una categoria di numeri la quale escluda riguardo a se stessa la mancanza delle finali è cosa facile inferire un ripiego per dimostrare in maniera regolare diretta o inversa la possibilità voluta dei salti del cavallo degli scacchi. Imperciocchè se vogliasi prescindere dal principio unità, relativamente al di cui buon effetto non si ha più alcun dubbio, non rimane che immaginare che siasi soddisfatto a qualunque altro caso generato da altri nove principj per i quali adducesi, come altrove, 47, 45, 3, 49, etc. In realtà se in vantaggio di tali numeri, si dovessero proseguire le tavole regolari ad imitazione delle addotte non avrebbe che a procedersi al solito ma senza temere imbarazzo e neppure irregolarità per qualche mancanza di finale, siccome i numeri mancanti sarebbero valevoli ad indicare all' uopo, e se ciò sembrasse giovevole, altre tavole,

5

quantunque inverse, regolari, definitive, decisive. Ed infatti poco importa che principiando da 49 non avvenga di terminare, per ipotesi in 64, giacchè se in modo contrario peraltro equivalente si principierà in 44 per terminare in 15, l'effetto apparirà sicuro essendo il 15 il terzo non il primo degli impari di quadrato. Invece di 29 sarebbe lecito di approfittare di 31, ed invece di 45 che è l'altro degli impari i quali sono in primo luogo fra i 4 numeri di figura geometrica, sarebbe lecito di approfittare di 23 impari in terzo luogo, in tal guisa rimanendo escluso ogni dubbio. Ma qualunque sia l'utilità che intendasi attribuire alle percorse ricerche sulla generale 1 a 64 considerata dipendentemente dalle sue derivate si è creduto di non indugiare ad adottare per la cercata dimostrazione la seguente. Ricorresi di nuovo alla distribuzione geometrica dei numeri la quale di due in due rende l'impiego delle finali osservabile. Suppongasi immediatamente che allorquando la generale 1 a 64 offre qualsiasi finale dei numeri pari, il terminare anche nell' altro pari corrispondente della medesima losanga

o quadrato sia necessità. Per conseguenza ben chiara se l'uno dei due non può essere una finale l'altro rimane indispensabilmente nello stesso divieto. Ciò posto avendosi ambedue le finali o essendo escluse ambedue, non si esita ad asserire che ammettendo esser cosa possibile tanto nella losanga quanto nel quadrato che manchino le due finali, si ammetterebbe un teorema assurdo; e ciò si passa a provare. Addotti qui pure i dieci numeri 1, 47, etc. i quali produssero la totalità di 136 soluzioni, si sa intanto che per i 64 salti e così per numeri estremi di combinazione è cosa valida il riguardarli come di evidente risultato. Di tale fondamento è maggiore adesso l'efficacia poichè dovendo essere a due a due o non essere ammissibili le finali diverrà talvolta sufficiente che la combinazione esista fra un numero impari dell' una ed un pari dell' altra figura geometrica estrema. Così se debbasi cominciare a 29 e terminare a 62 e si prenda in vece, senza 31 adesso permutazione superflua, il termine in 6 per applicare l'osservazione, avviene che il 7 combinando con 32 la

possibilità della soluzione è trovata. Infatti se per ipotesi, 6 ed 8 non sieno finali, il 7 che è terzo numero di quadrato deve per conservare l'effetto escludere la combinazione con 32 in cui si ha una finale per necessità; il che apparisce erroneo: dunque in 6 si ha la finale richiesta. Si avverte che lo stesso principio 29 genera tre giri di termini adesso equivalenti 2, 4, 54, e ciò non conviene trascurare. Riflettasi pertanto che non solamente le losanghe estreme non sono in communicazione, non solamente i terzi numeri 3, 55 sono angolari e così incapaci di produrre communicazione almeno mediante figure geometriche intermedie, ma che inoltre sarebbe anche inutile di invertere come se si volesse cominciare, per esempio, dal pari 4 e terminare all' impari 29, poichè anche il 30 è angolare. Non si ha peraltro imbarazzo, imperciocchè è manifesto che se con 29, 30, etc. si termini in 4, il residuo 5, 6, etc., 28 si riguarda come interposto chiaramente fra 60 e 61 interponendo 5 e 6 fra 8 e 7. Ciò avvertito, in tutti gli altri giri che dei 136 si dovrebbero esaminare non si incontra pure difficoltà, e

non abbisogna ne anche il cangiar numeri come si è fatto fra 62 et 6; ed il metodo consiste, come prevedesi, in pervenire all' assurdo per escludere il dubbio. Propongasi, per esempio, il principio 43 e la finale 50, ed accaderà come segue, di ragionare. Se 50 et 52 non sono numeri finali l'intermedio 51 impedirà di terminare ancora in 60; quindi neppure 60 e 58 sono numeri finali, e l'intermedio 59 impedirà di terminare ancora in 44; ma è cosa assurda che il principio 43 non dia 44 per finale; dunque sarà possibile cominciando in 43 aver fine in 50. Propongasi 59 come principio per compire il giro in 48. Il 47 intermedio a 46 e 48 ha più pari in combinazione, onde preso il 42 si vedrà che se 46 e 48 non sono numeri finali, neppure lo sono 42 e 44, e l'intermedio 43 impedirà di esserlo a 26 e 28; dunque l'intermedio 27 esclude la finale 60, la quale è di necessità, dunque diventano numeri estremi 59 e 48. Se in vece di 42 prendevasi il 6 che pure comunica con 47, si sarebbe risparmiato un quadrato di communicazione, il 7 combinando con 60. Ma si voglia

piuttosto cominciare in 7 ed aver fine in 34. Seguendo il metodo, come sopra si devia dallo scopo ne si incontra alcun numero del primo quadrato 5, 6, 7, 8. Invertesi pertanto come se si volesse cominciare in 34 ed aver fine in 7. Laonde se 5 e 7 non sono numeri finali, l'intermedio 6 escluderà la finale 47. Così 46 intermedio a 45 e 47 che non sono finali escluderà 33; ma una tale finale si ha certamente col principio 36 o 34, dunque si ha il principio 7 ed il termine 34. Sarebbe superfluo proseguire e si ammette come impossibile tanto nelle losanghe quanto nei quadrati la mancanza delle due finali: se poi di fatto l'una e l'altra mancasse, sarebbe soltanto indizio di qualche metodo non idoneo. Rimanendo il tutto fondato nel supporre che se una delle due finali di losanga o quadrato si ottenga si ottiene anche l'altra è d'uopo ciò dimostrare. Allorquando diventa una finale il quarto numero delle dette geometriche figure è noto che per effetto della generale 1 a 64 deducesi di terminare anche nel numero secondo; di qui la dimostrazione. Propongasi che vogliasi aver fine in

36 non cangiata la precedente origine in 7. Con 36 ottenuto il 34 pure è ottenuto. Avuto solamente il 34 si può cercare in vece per analogia da 52 a 41. Se qui ancora abbiasi solamente 50 è chiaro che siè soddisfatto alla ricerca come nel caso che si fosse avuto 52. Infatti poichè realmente trovasi con tutta facilità da 41 a 50 il giro 41 a 49, 40 a 1, 64 a 50, se ne approfitta per conoscere immediatamente come da 7 vadasi a 36 usando il ripiego di formare il giro d'imitazione 7 a 5, 8, 45, 48 a 46, 33 a 32, 29 a 31, 50 a 52, 49, 40, 37 a 39, 16, 13 a 15, 22 a 24, 21, 62 a 64, 61, 28, 25 a 27, 60, 57 a 59, 44, 41 a 43, 2 a 4, 1, 18 a 20, 17, 12, 9 a 11, 54 a 56, 53, 34 a 36. Resta peraltro il caso che manchi tanto 52 quanto 50, altrimenti non si tratterebbe che di sostituire ad un cercato numero ed in quarto luogo di quadrato o losanga altro che sia in secondo luogo ed in situazione analoga della scacchiere, sostituendo, quando occorre, anche al numero di origine e traendo profitto da geometrica disposizione di serie totale. Frattanto siccome nell' altra parte di dimostra-

zione supponesi per evitare le finali nulle che una finale trovata debba aversi come trovata anche l'altra, succede che procedendo qui pure nello stesso modo risolverebbesi il quesito col quesito. Ma si evita agevolmente l'ostacolo giacchè è sufficiente di enumerare pochi e semplici e già usati ripieghi quali secondo le circostanze servono ad allontanare la detta difficoltà di finali nulle ed esaminate in maniera adesso non opportuna dalle 115 dovute soluzioni, tutti giri formati mediante i 10 soliti principj 1, 47, etc. e 24 finali; dicesi 24 poichè sono esclusi i numeri 18, 52, 32, 60, 58, 30. La facilità come nell' esempio addotto di formare l'intero giro ha evidentemente il primo luogo. Si approfitta pure della combinazione di estreme geometriche figure come nel principio 15 e termine 48 siccome le due finali nulle renderebbero tale erroneamente anche 14; e perciò il supporre l'origine in 49 per aver fine in 24 allorchè si ha in 22 non ammette dubbio. Serve talvolta ad indicare l'errore il pari il quale combina con i due impari estremi dei tre che racchiudono le due finali

supposte nulle: così cominciando di nuovo da 15 per terminare in 2 o 4 il 14 sicura finale la quale combina con 1 e 5 insegna a non dubitare della finale 2 o 4; onde il supporre l'origine in 49 per aver fine in 56 allorchè si ha in 54 non ammette dubbio. In vece di due finali nulle come vicendevolmente escluse si osservi che nello stesso modo che trovando la seconda finale o quarto numero di losanga o quadrato si trova la prima o secondo numero, mancando la detta prima finale manca la seconda. L'altro ripiego che devesi riferire consiste in perturbare l'ordine dei numeri di due figure geometriche successive. Per aggiungere l'esempio di 29 origine e di 22 termine di giro si presenta invece la ricerca del giro di 39 a 24. Pertanto con 22 e 24, finali supposte nulle, il 23 rende nullo 18 il quale essendo la prima finale del quadrato 17, 18, 19, 20, rende nullo il 20: intanto il 19 produce lo stesso effetto con 54 e 56, ed anche con 52 seconda finale del quadrato 49, 50, 51, 52. Conseguentemente non deve essere possibile di terminare a 34 il quale combina con 53 intermedio a 54, 52: ma siccome mediante l'indicata

perturbazione di giri si ottiene 33, 36, 35, 34, 39, 38, 37, 40, etc., e così 34 diventa immediato supplente di 39, perciò il 34 in qualità di sicura finale che si è resa ancora evidente, esclude ogni dubbio relativo a 24. Se si formi invece la serie o perturbazione 17, 20, 19, 18, 23, 22, 21, 24, 25, etc., mediante 21 il quale intermedio adesso a 22, 24 combina con 40 si giunge immediatamente all' intento: così pure a cagione dello stesso 40 che combina con 21, 25. Il numero mentovato 40 che presentasi in occasione del principio uno è osservabile a motivo di numeri angolari, situazione che offre invariabilmente il 32 in quarto luogo della losanga, ma l'ostacolo è soltanto momentaneo giacchè avuto riguardo all' altra losanga 1, 2, 33, 64 incontrasi il primitivo ripiego mentre evidentemente 1, 64 a 2 produce 1, 64 a 33, 2 a 32. Essendo superfluo di inserire altri esempj non si differisce a dichiarare come cosa dimostrata che in tutti i 115 giri allorquando si ha una finale si trova anche l'altra della medesima losanga o del medesimo quadrato; e siccome è pure dimostrato non essere possibile che l'una e l'altra

manchi si conclude che a qualsiasi caso dei 115 e per conseguenza alla tótalità di 136 è permesso di soddisfare. Che anzi l'indicazione addotta dei giri d'imitazione suggerisce l'idea di rendere più generale la dimostrazione, deducendosi infatti in modo non equivoco che o si voglia variare il numero di principio o il numero di finale o l'uno e l'altro si ha l'andamento manifesto per soddisfare a ciascuna delle 1024 combinazioni. Colla trascorsa dimostrazione si è compito quanto assumevasi di riferire intorno ai 63 ed ai 64 salti che nello scacchiere e mediante le linee e mediante i numeri il cavallo degli scacchi eseguisce, ciò non ostante potendosi bramare che ora esercitato invada un campo più vasto si è creduto opportuno il dare in tal proposito qualche accenno. Allorquando da un primo scacchiere si passa ad un secondo contiguo al premesso e mediante tutto il lato, si ottiene non solamente una doppia quantità di numeri i quali ad evitar confusione è permesso di indicare con apici sovrapposti, ma inoltre la serie rimane chiusa vale a dire di 128 salti Imperocchè se pervenendo a 30 si passi a 45'

6..

risulta la formula 45' a 1', 64' a 46' e col soccorso di 46' si torna al primo scacchiere approfittando del passaggio 46' a 31, e così l'intero duplice giro o serie chiusa si forma. Riguardo ai 127 salti vale a dire al cominciare in qualsiasi numero impari o pari ed in qualsiasi pari o impari terminare è facil cosa osservare che alla ricerca soddisfasi immediatamente. E per verità se è possibile il problema di 63 salti avviene che soltanto sia questione del modo non impedito di passaggio fra i due scacchieri principalmente se in uno di essi abbiasi origine e nell' altro si termini; ma a ciò risponde favorevolmente la definizione stessa del salto di cavallo negli scacchi: per ottener pure di avere principio e fine nell' uno dei due scacchieri, che è l'altro caso a risolversi, si vede con chiarezza in ciò essere sufficiente che i due numeri estremi dei salti operati in uno scacchiere sieno idonei al passaggio come prima uno solo ricercavasi, ma a ciò risponde favorevolmente la possibilità stessa dei 63 salti. Allorquando al secondo scacchiere sovrasta un terzo inerente diviene indubitabile che ciò non apporta alcuna difficoltà: che se aggiungasi

un quarto scacchiere in modo o formare un grande quadrato diviso in 4 parti o scacchieri o quadrati che possono dirsi distribuenti, qui pure si conosce senza dilazione la possibilità di ogni giro di 255 salti quanto di ogni altro di 256. Ma giova oltrepassare un così ristretto numero di quadrati già detti distribuenti, che anzi non si differisce di ammettere che il grande quadrato abbia per base qualsiasi multiplo di 8. Qui per verità conviene cominciare dal considerare in qual modo nel quadrato grande si possano occupare tutti i distribuenti in guisa che il primo occupato rimanga in contatto coll' ultimo. A tale ricerca la quale se dicesi vasta deve anche dirsi illusoria si provvede senza fatica. Imperocchè immaginato che dalla destra alla sinistra si percorra tutto il rango superiore dei quadrati distribuenti avviene spontaneamente di discendere per tutta la prima colonna di tali quadrati: salendo in seguito per tutta la seconda colonna e così proseguendo alternativamente, si perviene nel terminare di salire nell' ultima colonna al contatto col primo quadrato ma nel solo caso di un numero pari di quadrati, peraltro

con evidente comunicazione dei salti del cavallo. Rimane il caso del numero dispari dei distribuenti il quale fa salire per la penultima colonna e così discendere per l'ultima; perciò allorchè si perviene alla detta penultima si proceda invece a destra quindi si salga per un solo distribuente e si proceda invece a sinistra e così alternando si perverrà a far comunicare il primo coll' ultimo distribuente, ma soltanto mediante la penultima colonna cioè in modo diagonale, come meglio si conoscerebbe se invece dei quadrati distribuenti si immaginassero scritti numeri dispari e pari alternativi e così apparisse la comunicazione dei due impari estremi. Anche un tal caso di impari aderisce evidentemente ai salti del cavallo non ostante l'indicata comunicazione diagonale. Conviene ora provvedere a tutti i casi di salti estremi che non comunicano col primo vale a dire ai casi di un multiplo di 64 meno l'unità. Ne qui si deve continuare a riguardare i distribuenti come semplici numeri ma risolvere la difficoltà in maniera che estrinsecamente dipenda dai salti del cavallo. A tale oggetto non si considera il grande quadrato

come diviso rapporto alla situazione dei distribuenti estremi tutto al più in tre rettangoli, ma in vece si ritorna alla serie totale chiusa la quale in due serie dividesi per effetto del termine finale che non combina col primo. Da ciò che si è detto riguardo a due, tre o quattro scacchieri si comprende che dall' uno all' altro ad oggetto di retrocedere in seguito, si ha passaggio tanto mediante numeri intermedj della serie di uno dei due scacchieri come 30, 31, 45, 46, quanto allorchè nell' una o nell' altra serie o in ambedue sono i numeri estremi di esse impegnati all' passaggio : d'altronde quando si ha soltanto contatto di scacchieri a motivo della diagonale, si permette per passaggio di formare per uno dei giri il semplicissimo 3 a 5, 8 a 64, 1 a 2, 7 a 6, il che serve a rappresentare lo scacchiere numerico alla memoria disposto all' uopo ed in modo facile a ritenersi. Laonde diventa così ben agevole se ora vogliasi investigare il giro totale cercato il pervenire all' intento, e maggiormente ancora se vogliasi riflettere che dovendosi soltanto provvedere all' una o all' altra delle due in cui dividesi la serie

totale chiusa si può di più in generale evitare il caso meno semplice ed unico di due scacchieri in contatto mediante prolungazione della diagonale. Perciò supponendo che nell' indicato quadrato grande e prodotto da quattro scacchieri l'ultimo dei mentovati e superiore al primo divenga in vece il primo a sinistra e sia in esso l'uno dei due numeri estremi del giro totale, si immagini in seguito che i tre rimanenti scacchieri sieno la totalità dell' una delle due porzioni in cui si dividono i distribuenti osservando nel tempo stesso che si è voluto evitare l'indicato caso delle diagonale. Fatto uso di nuovo degli apici per non avere confusione nei numeri dei tre distribuenti dei quali si considera come ultimo il sovrapposto al terzo supponesi che nel quarto distribuente o primo a sinistra sia il numero 29 l'origine del giro totale a cui trattasi ora di provvedere relativamente soltanto alla porzione percorsa mediante i numeri degli apici ′, ″, ‴ oltre i 64 numeri senza apici. Pertanto avviene che nella prima serie sia dato di inserire le tre rimanenti siccome conoscesi nel giro

che producesi 29 a 30, $45'$ a $31'$, $46''$ a $54''$, $59'''$ a $64'''$, $1'''$ a $58'''$, $55''$ a $64''$, $1''$ a $45''$, $30'$ a $1'$, $64'$ a $46'$, 31 etc. Se poi nel medesimo distribuente si voglia supporre il primo e l'ultimo numero del giro intero, il caso della diagonale ricomparisce, ma per quanto si è accennato neppure in ciò saprebbesi incontrare ostacolo: la qual cosa anche il solo esempio addotto serve a far conoscere siccome tolto il quadrato degli apici $''$ rimane se vuolsi 29 a 30, $45'$ a $1'$, $64'$ a $63'$, $56'$ a $62'$, $3'''$ a $5'''$, $8'''$ a $64'''$, $1'''$ a $2'''$, $7'''$ a $6'''$, $55'$ a $46'$, 31 etc. Per rapporto al triangolo si rifletterà come compongasi mediante un qualsiasi quadrato di distribuenti in guisa a formare un triangolo rettangolo il quale può dirsi dentato. Se nella prima colonna del detto quadrato salgasi avuto principio nel secondo distribuente di essa fino all' ultimo inclusivamente, e quindi per effetto della diagonale si scenda nella seconda colonna e così si alterni trascurato il rango inferiore dei quadrati minori o distribuenti fino ad occupare tutti quelli che costituiscono la diagonale ed in fine si percorra da destra a sinistra il rango trascurato

inferiore si otterrà non solo il detto triangolo dentato ma inoltre col primo l'ultimo distribuente sarà in combinazione. Peraltro apparisce che i quadrati minori o distribuenti che formano la diagonale combinano a due a due mediante porzione di essa finchè nel caso del quadrato maggiore composto di un numero impari di minori l'ultimo di essi combina mediante l'angolo non solo col penultimo dei detti minori ma di più col precedente. Non ostante che in opposizione a quanto incontravasi nei quadrati grandi si abbiano ora più coppie di distribuenti ciò non apporta difficoltà coll' aver relazione a quel che si è riferito in tale oggetto e coll' evitare il caso qui esposto della diagonale triplice ricorrendo come prima alla porzione di giro che evitava la coppia dei distribuenti. È ben vero che rimane qui pure il caso del principio e fine in un medesimo complesso di 64 numeri; ma si rifletta che la triplice diagonale svanisce quando si voglia giacchè essendo in essa compreso l'ultimo distribuente a destra si vede che si può invece di esso occupare senza indugio il penultimo salvo il percorrere i numeri dell' ultimo

quando l'altro ne offre l'occasione il che a motivo dell' unione mediante il lato, non manca. Del resto combinando e variando le geometriche figure ad oggetto al solito di trascorrere la superficie piana per occupare ad uno ad uno gli spazj elementari o caselle si avrà più o meno favorevole risultato secondo le circostanze della qualità, del numero, della grandezza relativa, della distribuzione parziale e totale. Che se ad un distribuente o ad una colonna di essi, altri si facciano succedere o altre colonne, le quali ne contengano la medesima quantità indeterminata si comprenderà che in tal modo nel mentre che si hanno pure le serie dei numeri naturali rappresentate dai distribuenti, risulta nel tempo stesso che per opera della serie riflettente con ordinato disordine, quanto piaccia si procede. Frattanto le investigazioni al di la dei limiti ristretti dello scacchiere non solamente fecondano la serie riflettente ma cangiano ancora la qualità di certi numeri, qualità relativa alla loro situazione. Così nel rettangolo di due o più quadrati consecutivi il 20, il 62, il 51, il 27 non proseguono ad avere un solo

numero di combinazione oltre gli immediati; peraltro intendesi di non aver riguardo che ai numeri angolari i quali allorchè erano tali provveduti dei soli immediati interrompevano anche delle serie derivate di ripetizione l'andamento successivo. Si è pertanto rimediato, per così dire, a un difetto relativamente a 55 e 30 e perciò, può dirsi, senza un vantagio definitivo giacchè a 38 e 3 e così alla serie derivata la difficoltà d'interruzione rimane. Ne si vede in qual modo la superficie piana di scacchiere o distribuente possa dare alle derivate un corso libero: se peraltro vogliasi ad ogni modo togliere l'ostacolo ricorrasi alla superficie curva di zona o cilindro. Confondendosi in tal caso il primo coll' ultimo lato del rettangolo o del quadrato totale non si hanno numeri con meno di 4 combinazioni, così più di quel che si cercava: e se non abbiasi che lo scacchiere, la prima colonna di numeri aderisce all' ultima e 38 combina con 19 e 23 come 3 con 28 e 58. Ottenuti in sì fatta guisa nuovi rapporti di numeri nella generale 1 a 64 mediante il cilindro e perciò col prescindere dalla spezzata in linee rette, ne deriva

che se si volesse variare nel tempo stesso anche la lunghezza delle linee e considerare per esempio, per base del cilindro il rango ultimo delle caselle o numeri 3, 6, etc. gioverebbe rendere convergenti i lati normali che producono le caselle, fino a rendere quelle del primo rango triangolari; e così invece del cilindro si formerebbe il cono e si avrebbe una maniera di rappresentare anche in tale figura geometrica la serie che si è nominata riflettente. Se l'altezza del cono vada sempre diminuendo fino a diventare zero si ha lo scacchiere in numeri ma in forma circolare come e di fatto si conosce giacchè si è creduto produrre la tavola ventunesima, altra maniera di rappresentare la serie riflettente nella quale peraltro le rettilinee spezzate ricompariscono ma con cangiamenti di lunghezze e perciò di angoli. Se poi per un istante immaginando, invece di rintracciare nuove distribuzioni di numeri nel circolo, che la base del cono sia la retta che divide a metà lo scacchiere, l'altro cono inverso inferiore al primo e della stessa grandezza si ha facendo svanire l'ultimo lato in vece del primo; e siccome si potrebbe anche

lo stato rettilineo dei lati concentrici variare in modo a produrre la sfera, risulta che la serie riflettente apparisce e contenuta fra i poli ed in forma sferica; e così qui pure qualche espediente a fine di procedere rimane indicato. Che se in luogo di maggiori investigazioni al di la della serie di andamento rettilineo vogliasi ad essa il ritorno, si otterrà ciò non ostante di evitare la superficie semplice come avviene se la cubica si immagini di percorrere. Infatti se piaccia di avere un quadrato di uno o più scacchieri per base, comprendesi che nell' uno o nell' altro caso alla serie riflettente è lecito di pervenire a percorrere il quadrato superiore mediante uno dei quattro laterali: percorso così il detto superiore si compirà regolarmente il giro totale passando in primo luogo al primo o all' ultimo dei tre rimanenti. In ogni modo risulta che uno dei tre quadrati di angolo solido non ha alternazione di pari e dispari relativamente con gli altri due quadrati, la qual cosa è colpa dei numeri i quali non si dividono che in dette due qualità di pari e dispari. Peraltro rendendo cubica ogni casella un tale per così dire difetto svanisce, e la

serie riflettente potrà anche l'intero solido penetrare mediante i 512 cubi elementari. Si apprende infatti immediatamente come da uno scacchiere si passi ad altro sovrapposto o inferiore e formato del pari di caselle cubiche, senza incontrare un benchè menomo cangiamento nella legge dei salti de cavallo degli scacchi: è ben vero frattanto l'aumento di combinazioni e che si perviene ad avere una triplice quantità di esse in vece delle otto e così 24 è adesso il limite. Qualora al cubo un secondo si aggiunga o più o meno per formare un solido più ripartito l'occupazione totale delle caselle è del pari evidente. Rapporto alla serie totale chiusa del solido nulla essendosi riferito, converrà il darne almeno qualche accenno relativamente al cubo. A tale oggetto si immagini per un istante ridotto ad un semplice foglio lo scacchiere; se il foglio suppongasi piegato per la metà di altezza in guisa che il rango superiore dei numeri pervenga al contatto del rango ultimo, avverrà che piegata in seguito per metà la larghezza i 64 numeri si troveranno sovrapposti per formare un cubo allorchè si voglia supporre che le caselle diventino cubi-

che. Addotto pertanto in tal modo il cubo i numeri si incontreranno disposti come segue 1 a 16, 21 a 48, 17 a 20, 59 a 60, 57 a 58, 49 a 56, 63 a 61, 64: laonde non si tratta che di alterare la disposizione ordinaria dei numeri dello scacchiere, procedendo finchè si può e quindi retrocedendo; mirabile spontaneità colla quale nel cubo presentasi la serie chiusa avvenendo nel tempo stesso l'alternazione di losanghe e quadrati. Del resto non era arduo neppure colle 512 unità il formare la serie chiusa: ed infatti se per esempio si cominci in un numero degli angoli superiori per compire in altro numero contiguo al medesimo tutto il giro dello strato numerico superiore, gioverà passando al terzo strato fare altrettanto e così operare alternativamente fino al penultimo; da esso ed evidentemente all' ultimo strato si discende occupando in vece della prima la quarta casella; e terminando quindi nella detta prima e così nell' angolo il giro di tutte le unità dello strato si salirà agli strati superiori alternando come precedentemente fino al secondo nel quale peraltro si terminerà il giro totale nella terza

casella e non nella prima, per avere la serie chiusa. Si deve osservare che a motivo dei numeri degli angoli del cubo i quali combinano con 6 numeri e non soltanto con due, le serie derivate non sono interrotte dall' angolo solido e rimane interamente libero il corso della serie riflettente; che se ciò fa credere alla risoluzione qui pure del problema di qualsiasi principio e termine di giro, la certezza se ne ha dalla detta osservazione delle alternazioni supplenti alle successioni degli strati; alternazione che usata all' uopo conduce rapidamente all' intento, quantunque a prima vista faccia dubitare del risultato la moltitudine dei casi. Non deve sorprendere anzi sembrerà forse indispensabile quanto rimane a dirsi giacchè non si tratta soltanto di una indagine relativa allo scacchiere al quale non se ne aggiungono altri, ma di più non si fra che aumentare ben poco il numero delle caselle per così condurle alla precisa quantità di cento. Ad effetto di maggiore connessione colle trascorse investigazioni, in verità i 36 numeri che si aggiungono non si considerano, per averne in primo luogo i 36 salti, in

forma di quadrato ma in vece ed immediatamente in forma di rettangolo angolare adattato al solito scacchiere provveduto del solito giro della spezzata. A motivo di semplice indicazione per numeri ignoti ma in certi limiti, fatto uso di lettere per accennare le caselle estreme del detto rettangolo si scriva A, B, C, D a sinistra ed E, F, G, H a destra nelle 4 caselle finali rimanendo interposta al rettangolo la casella 55ª. e come meglio nella tavola 22ª. che se ne offre. Col soccorso di dette lettere si percorrono le 36 caselle con 4 sole spezzate delle quali rimangono pure così additati i punti estremi e non manca altro che inserire le lettere a due a due fra i numeri del giro di 64 caselle. Avuto riguardo alle permutazioni che provengono dalle losanghe e dai quadrati nel caso adesso di numeri che trascurati in tali geometriche figure o non trascurati combinano colle lettere, l'intervento di queste mentre interrompe la serie non impedisce di ricomporla in modo a renderla totale ed a cento salti soddisfacente con gli stessi numeri estremi 1, 64 e non ostante che si inseriscano 4 nuove spezzate provenienti

da 36 numeri e come si vede nella formula che segue 1 a 9, 12 a 27, E ad A, 35 a 38, B ad F, 28, G a C, 10 a 11, D ad H, 51 a 50, 31 a 29, 32 a 34, 39 a 49, 52 a 64. Frattanto la prima e l'ultima delle quattro parti o quadrati dello scacchiere solito conservano come per il passato la serie in forma di losanghe e quadrati. Adunque se un tale andamento geometrico là dove è stato alterato vogliasi riprodurre ad oggetto o di formare le diverse serie di 99 salti o per cercare di applicare ad esse la dimostrazione o per qualunque altra ragione si provvederà prontamente a tale scopo col trasportare da sinistra a destra le lettere superiori A, B, C, D e da destra a sinistra le inferiori E, F, G, H sovrapposti ad esse gli apici ad evitar confusione. Infatti ideando che per siffatto modo vada in contatto della prima colonna dello scacchiere ordinario di 64 caselle il rettangolo angolare in guisa che al medesimo in vece di 55 sia 38 il numero intermedio ed A′, H′, analogamente a ciò che si è operato, sieno caselle di angoli, succederà nel rintracciare una seconda formula di avere opportuna la seguente, 1, 4 a 2,

8..

43 a 42, H′ a D′, 62 a 63, C′ a G′, 5, F′ a B′, 55 a 54, 19 a 20, A′ ad E′, 6 a 18, 23 a 21, 24 a 41, 44 a 53, 56 a 61, 64. Ma per maggiore chiarezza e regolarità, trattandosi in qualche modo dell' importante sistema decimale, con metodo più diretto lo scacchiere di 100 caselle si passi a discutere. Immaginandolo come l'altro diviso in 4 parti o quadrati ed investigando di una di esse il giro apparisce che i quattro angoli presentano subito un ottagono a stella (T. 23ª.), e la simmetria delle intermedie situazioni dei numeri ci conduce agevolmente a formare in giro una spezzata intrecciata (T. 23ª.), della quale l'ultimo numero che combina col primo di essa può servire a terminare nel centro del quadrato. Ma per evitare tal termine che non darebbe escita a fine di percorrere gli altri quadrati si osservi che i quattro ultimi numeri trovati formano una losanga e passando perciò dal primo di essi all' ultimo il quadrato terminerà in modo utile, e si dovrà senz' altro scrivere il 23 nel centro ed il 25 ove scrivevasi il 23. Per sì semplice cangiamento si potrà nel con-

tiguo quadrato a destra cominciare egualmente nell' angolo di esso, e vedonsi immediatamente riempite le cento situazioni, mentre pur l'ultima colla prima con salto di cavallo combina (T. 24ª, T. 25ª). Ma ritornando al primo quadrato e fatta riflessione alla centrale situazione del 23 apparisce come mediante esso ottengasi invece di 25 di terminare in qualunque degli impari precedenti. Così volendosi, per esempio, 11 per venticinquesimo avremo con evidenza 1 a 10, 23 a 25, 22 a 11; e per avere il 5 per venticinquesimo avremo 1 a 4, 9 a 10, 23 a 25, 22 a 11, 8 a 5. Conviene pertanto in primo luogo l'esame dei numeri nei quali termina l'intero giro di cento numeri allorchè desso ha principio e termine in un medesimo dei quattro piccoli quadrati. Persistendo a tal fine nel primo di tali quadrati, giacchè senza dimostrazione, apparisce che ciò è sufficiente, la forma stellata dell' ottagono ci indica in qual modo si possa cominciare negli angoli cioè in 7, 5, 1, trascurato l'angolo 3 come superfluo, ed aver termine nell' ottagono medesimo. Ed infatti poichè il principio, per esempio, 9 della spezzata a corona o intrec-

ciata permette senza dubbio di terminarla in qualsiasi dei suoi numeri impari, col principio 7 si termina per esempio in 2 ponendo 7, 6, 5, 4, 3, sortendo dal piccolo quadrato e nel rientrare serbando per ultimo l'acuziangolo 8, 1, 2. In 4 si terminerebbe coll' acuziangolo 6, 5, 4. Cominciando da 5 e terminando in 2 o in 8 si opera in modo eguale. Si vede poi che 1 darebbe il termine 4 col porre l'ottusiangolo 1, 2, 3, sortire e rientrando terminare con 8, 7, 6, 5, 4 : si opererebbe egualmente se invece si terminasse in 6. Riguardo al terminare negli altri pari del quadrato in questione, conservando negli angoli l'origine dell' intero giro, si osservi che l'ottagono, qualunque sia l'angolo acuto in cui comincia, combina indistintamente con uno dei numeri intermedj 9, 13, 17, 21; quindi si termina agevolmente nei numeri pari che li precedono o li seguono approfittando soltanto di 9 e 25 a fine di percorrere i tre quadrati restanti e ritornare nel primo. Vogliasi per esempio cominciando in 7 terminare in 20 si avrà evidentemente il giro 7 a 8, 1 a 6, 21 a 100, 9 a 20, e per terminare in 22 il giro 7 a 8, 1 a 6, 21 a 9, 100 a 22. Ri-

guardo poi all' altro caso che devesi investigare, e meno semplice, vale a dire al caso di principiare e finire fuori dell' angolo e sempre nel discusso quadrato, giova il partire dalla regola fondamentale d'indagine non ardua che unendo ai 9 primi ogni volta due numeri si hanno tutti i pari del piccolo quadrato non compresi nell' ottagono a stella quadrangolare fuorchè l'ultimo pari a cagione del penultimo impari centrale, ma desso non ammette dubbio. Così per terminare, per esempio, in 12 cominciando da 9, si ha subito il giro 9 a 11, 8 a 1, 100 a 12. Che se al ottagono in vece del numero 9 si passi per esempio, col 17 il metodo in sostanza rimane il medesimo, poichè se approfittando della permutazione nell' ordine degli impari della losanga 22, 23, 24, 25 si ponga il giro 17 a 22, 25 a 23, 16 a 9 si vede che allorchè siasi ottenuto 24 la coppia 24, 23 che a motivo del centrale 23 ed in vece di incontrare i pari dell' ottagono ci fa passar oltre mediante la coppia 16, 15 non apporta pregiudizio, mentre è chiaro il 16 non ammetter dubbio. Adoprando in vece del 17 il 25, il 23, ovvero altro

impari, la regola rimane chiaramente la stessa, e la simmetria dell' ottagono ci fa vedere che non vi è timore di terminar in 5 che non permetterebbe di continuare il giro. Per terminar poi nei pari del detto ottagono non si ha che a compire la spezzata, compire gli altri quadrati, e penetrare in esso mediante 1 o 3 o 7, il che non presenta difficoltà. Rimane soltanto la ricerca dei giri i quali, avendo principio nel primo quadrato poichè ciò si vedrà essere sufficiente, vanno a terminare in uno dei tre rimanenti, ricerca ben facile ora che alle altre si è provveduto. Tre casi si presentano: o si dovrà terminare nel secondo o quarto quadrato, il che seguirà la stessa regola, o in secondo luogo si dovrà terminar nei pari dell' ottagono del 3° quadrato, o in terzo luogo nei pari della spezzata intrecciata del detto. Per risolvere il caso primo basta rendere consecutive le spezzate intrecciate, ed in seguito gli ottagoni del 2°. e 3°. quadrato ovvero del quarto e terzo se nel quarto non si vuole terminare, ben inteso che dalle spezzate siasi disunito in favore degli ottagoni il numero che in ciascuna prendesi come primo.

Ed infatti se vogliasi l'esempio da 5 a 28, si sa che il primo quadrato può terminare in uno, che la spezzata del quarto quadrato può cominciare in 100 ed avere per penultimo termine 87, che il terzo quadrato, omessi 9 numeri, può cominciare in 74 conservato ultimo numero 75, che passando a 76 si può compire in 88 il quarto quadrato, e quindi il terzo mediante 51 e 59, si sa infine che se vogliasi passare ad un numero angolare 30 o 32 si possono avere tutti i 25 del secondo quadrato e compire in 28 il giro come si desidera. Per risolvere il caso secondo non si ha che a compire due quadrati, compire la spezzata del terzo, e compito anche il restante quadrato all' ottagono del terzo ritornare. Così ritornando ad 1 e terminando a 58 si ha 1 a 50, 59 a 100, 51 a 58. Nel rimanente e terzo caso, vale a dire allorchè si vuol terminare in un numero pari della spezzata del terzo quadrato, giova evidentemente ricorrere all' emesso principio che unendo ai 9 primi ogni volta due numeri si hanno tutti i pari non compresi nell' ottagono fuorchè l'ultimo che peraltro non ammette dubbio. E per addurre qui pure un

esempio da 1 si terminerà in 64 ponendo il giro 1 a 50, 59 a 63, 52 a 58, 51, 100 a 64. Tali indagini che sopra cento numeri sono state aggiunte ci additano la via che il cavallo degli scacchi percorre non meno felicemente nel sistema decimale; e qui pure vedesi la geometria combinata in modo anche più semplice coi numeri, e la serie riflettente dar vita ad un aritmetica che potrebbe dirsi geometrica, e così il problema del salto non interrotto del cavallo degli scacchi, il quale di essa a cagione di numeri in situazione geometrica, era l'origine ne addiverrebbe la dipendenza: che se poi non vogliasi il cavallo degli scacchi ad altro esercitato che al celebre suo giuoco ed in mezzo alle sue guerresche abitudini, le investigazioni che si sono addotte ci condurranno allo scopo di renderlo alle battaglie più destro.

FINE.

INDICE.

Pagina

Prefazione. I

Dimostrazione geometrica dei 64 salti del cavallo degli scacchi. 1

Alcune osservazioni che nascono dal ridurre i salti del cavallo degli scacchi a tre sole figure geometriche. 6

Numeri sostituiti alle linee; se ne deducono le formule del giro totale dello scacchiere per qualunque principio e termine. 9

Metodi diretti per la possibilità di ogni origine e fine nel percorrere tutto lo scacchiere ideando di pervenire alla dimostrazione : dimostrazione. 21

Alcune conseguenze geometriche dell' occupazione di tutto lo scacchiere con salti successivi e diversi del cavallo degli scacchi per tutti i 1024 casi. 43

Scacchiere di 100 caselle totalmente percorso come l'altro dai salti del cavallo ancorchè l'una e l'altra estrema casella si determini. 57

TAVOLE.

T^a. 1. Salti del cavallo degli scacchi per occupare geometricamente 32 caselle con losanghe e quadrati.

T^a. 2. Ripetizione del precedente metodo, occupazione delle 32 caselle che rimanevano escluse.

T^a. 3. Occupazione dell' intero scacchiere combinando le due tavole precedenti e perciò unica interruzione di salti dopo 32 di essi.

T^a. 4. Giro totale dello scacchiere con 64 salti successivi e diversi del cavallo degli scacchi per effetto della fondamentale distribuzione geometrica in losanghe e quadrati.

T[a]. 5. Alternazione degli acuziangoli dei salti in forma di stella; esagono prodotto dagli ottusiangoli e dall' angolo retto.

T[a]. 6. Alternazione degli ottusiangoli dei salti, ottagono.

T[a]. 7. Compendio degli angoli che derivano dai salti; posizione dell' angolo d'incidenza e riflessione per l'angolo retto.

T[a]. 8. Indicazione dei 64 salti sostituendo i numeri alle linee.

T[a]. 9. Di 115 formule per tutti i 63 salti successivi e diversi 48 formule per i numeri sulla diagonale 1, 47, 45, 3.

T[a]. 10. 34 formule per i numeri 49, 7 in seguito alle precedenti.

T[a]. 11. 33 formule per i numeri 43, 29, 59, 27, compimento delle 115.

T[a]. 12. Le 21 formule per i numeri 1, 47, 45, 3, 49, 7, 43, 29 colle quali si soddisfà a tutti i 64 salti successivi e diversi, ovvero compimento delle 136 formule che valgono a tutti i casi del giro totale dello scacchiere con salti del cavallo degli scacchi.

T[a]. 13. Formule che derivano in modo diretto dalla generale 1 a 64.

T[a]. 14. Formule che derivano in modo diretto della generale inversa 1, 64 a 2.

T[a]. 15. Formule dedotte dalla 1[a]. 57 a 64, 1 a 56.

T[a]. 16. Formule dedotte dall' inversa 57 a 1, 64 a 58.

T[a]. 17. Altre formule che derivano dalla generale 1 a 64 successivamente finchè i numeri angolari o le finali già trovate non costringono a ricominciare.

T[a]. 18. Altre formule come precedentemente per la generale inversa 1, 64 a 2.

T[a]. 19. Tavola in linee prodotta dalla decima formula precedente.

T^a. 20. Numeri sostituiti alle linee della precedente tavola, ovvero alterazione della disposizione dei numeri intermedj nella tavola fondamentale 8^a.

T^a. 21. Numeri della T. 8^a. disposti nel circolo.

T^a. 22. Applicazione della T. 8^a. allo scacchiere di 100 caselle.

T^a. 23. Ottagono a stella, e spezzata intrecciata, ovvero due figure geometriche le quali risultano dai salti del cavallo degli scacchi nella 4^a. parte dello scacchiere di 100 caselle.

T^a. 24. Cento salti nello scacchiere di 100 caselle.

T^a. 25. Indicazione dei 100 salti sostituendo i numeri alle linee.

ERRORI.			CORREZIONI
Pagina.	Riga.		
II.	19.	spazi	spazj
8.	15.	circostnati	circostanti
9.	2.	state trovate	stati trovati
11.	16.	imparisi	impari si
12.	20.	intal	in tal
16.	7.	come così	come cosa
40.	6.	quali	i quali
52.	7.	vantagio	vantaggio
57.	16.	fra	fa

EXTRAIT

DU CATALOGUE DES LIVRES

QUI SE TROUVENT CHEZ **BACHELIER**,

Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, de l'École des Arts et Manufactures, etc., quai des Augustins, 55.

BIOT. ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, in-8., édit. revue et corr., 1813. . . . . 7 fr. 50 c.

—— NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE STATIQUE, destinées aux jeunes gens qui se préparent pour l'École Polytechnique et qui suivent les Cours de l'École de Saint-Cyr; 1829, 1 vol. in-8. . . . . 4 fr.

BORGNIS. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CONSTRUCTION APPLIQUÉE A L'ARCHITECTURE CIVILE, contenant les principes qui doivent diriger 1°. le choix et la préparation des matériaux; 2°. la configuration et les proportions des parties qui constituent les édifices en général; 3°. l'exécution des plans déjà fixés; suivi de nombreuses applications puisées dans les plus célèbres monuments antiques et modernes, etc.; in-4 d'environ 150 pages; et Atlas de 30 planches gravées par Adam, 1823. . . . . 36 fr.

BUREAU DES LONGITUDES.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES faites à l'Observatoire royal de Paris, publiées par le Bureau des Longitudes, in-folio, 1825, tome Ier. . . . . 50 fr.

—— Tome IIe, 1837. . . . . 50 fr.

TABLES DE JUPITER ET DE SATURNE, 2e édition, augmentée des Tables d'Uranus, par M. BOUVARD, membre de l'Institut, in-4, 1821. . . . . 12 fr.

TABLES DE LA LUNE, par M. BURCKHARDT, membre de l'Institut, in-4, 1812. 8 fr.

TABLES DU SOLEIL, par M. DELAMBRE, et TABLES DE LA LUNE, par M. BURG, in-4, 1806. . . . . 18 fr.

TABLES ÉCLIPTIQUES DES SATELLITES DE JUPITER, d'après la théorie de M. de LAPLACE et la totalité des observations faites depuis 1662 jusqu'à l'an 1802, par M. Delambre, in-4, 1817. . . . . 10 fr.

TABLES DES SATELLITES DE JUPITER, par M. DAMOISEAU, 1836. . . . 15 fr.

TABLES DE LA LUNE, formées par la seule théorie de l'attraction et suivant la division de la circonférence en 400 degrés; par M. DAMOISEAU, in-fol. 1818.

CONNAISSANCE DES TEMS, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, pour les années 1837, 1838 et 1839.

Prix de chaque année avec Additions, 7 fr., et sans Additions, 5 fr.

On peut se procurer la Collection complète, ou des années séparées de cet Ouvrage, depuis 1760 jusqu'à ce jour.

ANNUAIRE PRÉSENTÉ AU ROI par le Bureau des Longitudes, in-8. . . . . . 1 fr.

Cet Ouvrage paraît tous les ans.

CAGNOLI. TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE, traduit de l'italien, par M. Chompré, 2e édition, in-4, 1808. . . . . 18 fr.

CHRISTIAN, Directeur du Conservatoire des Arts et Métiers. TRAITÉ DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE, ou Exposé de la science de la Mécanique, déduite de l'expérience et de l'observation, principalement à l'usage des manufacturiers et des artistes; 3 vol. in-4, et Atlas de 60 planches doubles. . . . . 75 fr.

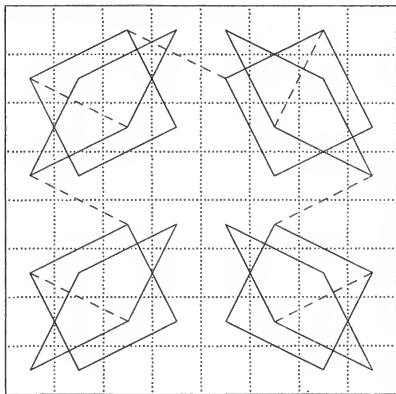
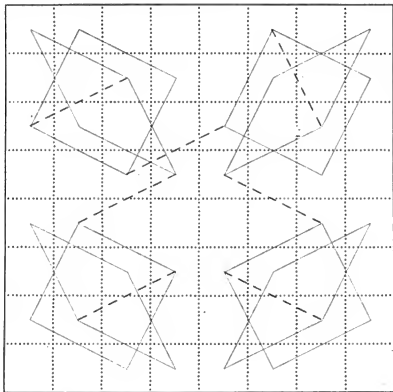
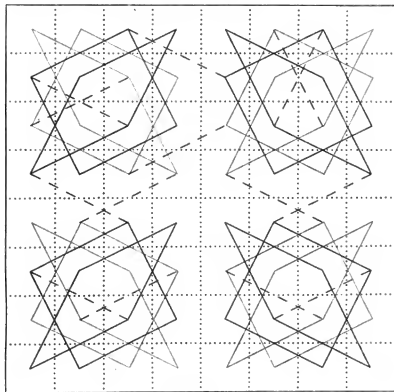
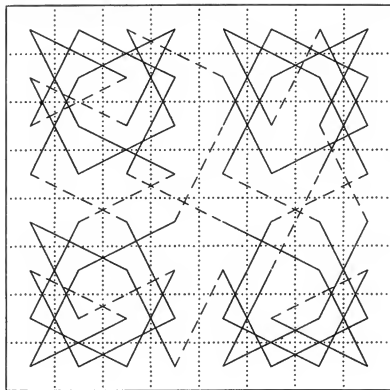
DELAMBRE, Secrétaire perpétuel de l'Institut, Membre de la Légion-d'Honneur, Professeur d'Astronomie au Collège Royal de France, etc. TRAITÉ COMPLET D'ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, 3 vol. in-4, avec 29 planches, 1814... 60 fr.

DELAMBRE. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DU MOYEN AGE, 1 vol. in-4, 1819, avec 17 pl. en taille-douce. . . . . 25 fr.
—— HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE MODERNE, 2 vol. in-4; avec 17 pl., 1821, 50 fr.
—— HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DU XVIII^e SIECLE, publiée par M. MATHIEU, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes; in-4 avec pl., 1826, ... 36 fr.
—— TABLES ASTRONOMIQUES. *Voyez* Bureau des Longitudes.
—— BASE DU SYSTEME METRIQUE, 4 vol. in-4. . . . . 121 fr.
Le tome IV, par MM. Arago et Biot, membres de l'Institut, 1 vol. in-4, 1821, se vend séparément, ... 21 fr.
DELAMBRE et LEGENDRE. Méthode analytique pour la DETERMINATION D'UN ARC DU MERIDIEN, in-4, an VII. . . . . 9 fr.
EUCLIDE. ŒUVRES EN GREC, LATIN ET FRANÇAIS, d'après un manuscrit très ancien, qui était resté inconnu jusqu'à nos jours; par Peyrard, traducteur des Œuvres d'Archimède, ouvrage approuvé par l'Académie des Sciences; 3 vol. in-4., 1817 et 1818. . 90 fr.

ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

JOURNAL DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, par MM. Lagrange, Laplace, Monge, Prony, Fourcroy, Berthollet, Vauquelin, Lacroix, Hachette, Poisson, Sganzin, Guyton-Morveau, Barruel, Legendre, Haüy, Malus, Ampère, Binet, Olivier, Duhamel, Coriolis, etc., 24 cahiers en 23 vol. in-4, avec des planches. . . . . 136 fr. 50 c.
Chaque cahier se vend séparément.
CORRESPONDANCE SUR L'ECOLE POLYTECHNIQUE, 3 vol. in-8.

GAUSS. RECHERCHES ARITHMETIQUES, traduites par M. Poullet-Delisle, Elève de l'Ecole Polytechnique et Professeur de Mathématiques à Orléans, 1 vol. in-4, 1807. 18 fr.
HAGEAU, Inspecteur divisionnaire au Corps des Ponts-et-Chaussées. DESCRIPTION du Canal de jonction de la Meuse au Rhin, etc., 1819, 1 vol. in-4, grand papier, et atlas composé de 21 pl. sur demi-feuille grand-aigle. . . . . 70 fr.
Nota. Les planches qui composent l'atlas se vendent séparément comme épures.
HISTOIRE ET MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES DE PARIS, 157 vol. in-4, rel. . . . . 1500 fr.
JOURNAL DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES, ou Recueil mensuel de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques, publié par J. Liouville, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique.
Prix de l'abonnement pour Paris : 30 et 34 fr. franc de port pour la France, et pour l'étranger 38 fr.
LACROIX, membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, etc. TRAITE DU CALCUL DIFFERENTIEL ET DU CALCUL INTEGRAL; 2^e édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, 3 vol. in-4, avec 18 planches. . . . . 66 fr.
L'auteur a fait des changemens et des augmentations considérables à cette nouvelle édition, qu'il a revue avec le plus grand soin.
—— COURS DE MATHEMATIQUES à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations. Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Ecoles secondaires, Colléges, etc., 10 vol. in-8. . . . . 49 fr.
LAGRANGE. THEORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES; nouvelle édition, revue, et augmentée par l'Auteur, in-4 . . . . 15 fr.
LAPLACE (M. le marquis de), Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes de France, des Sociétés royales de Londres, de Gottingue, etc. — SES ŒUVRES, 7 vol. in-4. . . . . 208 fr.
On vend séparément le TRAITE DE MECANIQUE CELESTE, 5 vol. in-4, avec les Supplémens. . . . . 160 fr.
—— MECANIQUE CELESTE, tome V, in-4, avec suppl., 1825 et 1827, ... 29 fr.
Supplément au tome V, séparément. . . . . 3 fr.
—— THEORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITES, 4^e édit. . . . . 36 fr.
—— EXPOSITION DU SYSTEME DU MONDE, 6^e édit., précédé de l'Eloge de l'auteur, par M. Fourier, 1835, in-4, papier fin, avec portr. . . . . 18 fr.
—— Le même Ouvrage, 2 vol. in-8, 1835. . . . . 15 fr.

Cav: degli Scacchi. March: Teodoro Ciccolini.

degli Scacchi: March: Teodoro Ciccolini.

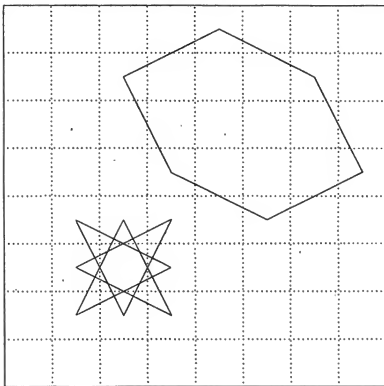
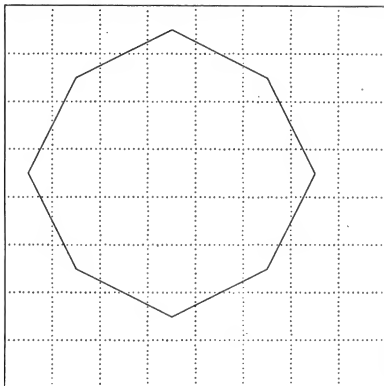
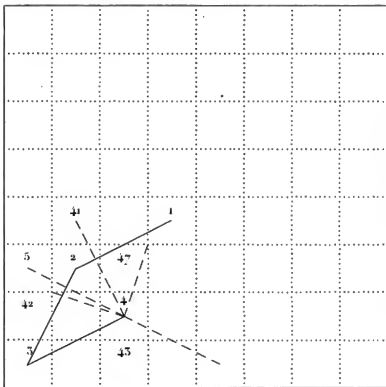
Tª 5.

Cav: degli Scacchi. March: TEODORO CICCOLINI. T.ª 6.

41 1

5 2 47

42 4

3 43

38	35	16	11	22	63	20	55
13	10	37	34	17	54	23	62
36	39	12	15	64	21	56	19
9	14	33	40	53	18	61	24
46	41	8	1	32	25	52	57
5	2	47	44	49	60	31	28
42	45	4	7	26	29	58	51
3	6	43	48	59	50	27	30

Da 1 a 42 —— 1 a 25, 64 a 43, 26 a 42.
a 20 —— 1 a 11, 64 a 53, 12 a 19, 52 a 20.
a 46 —— 1 a 32, 47 a 64, 33 a 46.
a 22 —— 1 a 21, 34 a 64, 33 a 22.
a 54 —— 1 a 32, 61 a 64, 33 a 53, 60 a 54.
a 36 —— 1 a 22, 37 a 64, 23 a 36.
a 16 —— 1 a 11, 64 a 17, 12 a 16.
a 34 —— 1 a 11, 64 a 35, 12 a 34.
a 8 —— 1 a 7, 60 a 33, 64 a 61, 32 a 8.
a 38 —— 1 a 33, 64 a 39, 34 a 38.
a 10 —— 1 a 9, 12 a 64, 11 a 10.
a 40 —— 1 a 11, 64 a 41, 12 a 40.
Da 47 a 20 —— 47 a 29, 48 a 61, 28 a 21, 62 a 64, 1 a 20.
a 22 —— 47 a 45, 48 a 59, 44 a 27, 60 a 64, 23 a 26, 1 a 22.
a 2 —— 47 a 45, 48 a 59, 44 a 27, 60 a 64, 1 , 26 a 2.
a 54 —— 47 a 45, 48 a 53, 44 a 1, 64 a 54.
a 36 —— 47 a 45, 48 a 64, 1 a 21, 24 a 22, 37 a 44, 25 a 36.
a 16 —— 47 a 32, 15 a 1, 64 a 48, 29 a 31, 26 a 28, 25 a 16.
a 34 —— 47 a 46, 33 a 1, 64 a 48, 45 a 34.
a 8 —— 47 a 32, 7 a 1, 64 a 48, 29 a 31, 26 a 28, 25 a 8.
a 64 —— 47 a 45, 48 a 59, 44 a 1, 60 a 64.
a 38 —— 47 a 46, 39 a 45, 48 a 64, 1 a 38.
a 10 —— 47 a 45, 48 a 53, 44 a 11, 54 a 64, 1 a 10.
a 12 —— 47 a 45, 48 a 53, 60 a 64, 1 a 11, 54 a 59, 44 a 12.
Da 45 a 42 —— 45 a 64, 1 a 41, 44 a 42.
a 20 —— 45 a 52, 21 a 44, 53 a 64, 1 a 20
a 22 45 a 40, 21 a 1, 64 a 46, 39 a 22.
a 2 —— 45 a 34, 63 a 46, 33 a 26, 1 , 64 , 25 a 2.
a 54 —— 45 a 34, 53 a 46, 33 a 1, 64 a 54.
a 36 —— 45 a 64, 1 a 33, 44 a 40, 37 a 39, 34 a 36.
a 16 —— 45 a 33, 46 a 64, 1 a 15, 32 a 16.
a 14 —— 45 a 53, 44 a 15, 54 a 64, 1 a 14.
a 34 —— 45 a 40, 47 a 64, 1 a 33. 46 , 39 a 34.
a 64 —— 45 a 59, 44 a 1, 60 a 64.
a 38 —— 45 a 40, 37 a 1, 64 a 46, 39 a 38.
a 10 —— 45 a 53, 44 a 11, 54 a 64, 1 a 10.
Da 3 a 42 —— 3 a 1, 4 a 25, 64 a 43, 26 a 42.
a 20 —— 3 a 1, 4 a 11, 64 a 53, 12 a 19, 52 a 20.
a 46 —— 3 a 1, 4 a 32, 47 a 64, 33 a 46.
a 22 —— 3 a 1, 4 a 21, 34 a 64, 33 a 22.
a 54 —— 3 a 1, 4 a 32, 61 a 64, 33 a 53, 60 a 54.
a 36 —— 3 a 1, 4 a 22, 37 a 64, 23 a 36
a 16 —— 3 a 1, 4 a 11, 64 a 17, 12 a 16.
a 14 —— 3 a 1, 4 a 10, 15 a 64, 11 a 14
a 34 —— 3 a 1, 4 a 11, 64 a 35, 12 a 34.
a 8 —— 3 a 1, 4 a 7, 60 a 33, 64 a 61, 32 a 8.
a 64 —— 3 a 1, 4 a 64.
a 38 —— 3 a 1, 4 a 33, 64 a 39, 34 a 38.

Da 49 a 42 —— 49 a 64, 1 a 39, 46 a 45, 48 a 47, 40 a 41, 44 a 42.
a 6 —— 49 a 8, 5 a 1, 64 a 50, 7 a 6.
a 20 —— 49 a 52, 21 a 33, 46 a 48, 45 a 34, 53 a 64, 1 a 20.
a 62 —— 49 a 32, 61 a 50, 31 a 1, 64 a 62.
a 46 —— 49 a 64, 1 a 45, 48 a 46.
a 22 —— 49 a 32, 21 a 1, 64 a 50, 31 a 22
a 24 —— 49 a 32, 15 a 14, 1 a 13, 16 a 23, 64 a 50, 31 a 24.
a 2 —— 49 a 32, 61 a 64, 1 , 60 a 50, 31 a 2.
a 54 —— 49 a 8, 53 a 50, 7 a 1, 64 a 54.
a 56 —— 49 a 40, 17 a 8, 39 a 18, 57 a 64, 1 a 7, 50 a 56.
a 36 —— 49 a 64, 1 a 33, 46 a 48, 45 a 40, 37 a 39, 34 a 36.
a 16 —— 49 a 32, 15 a 1, 64 a 50, 31 a 16.
a 28 —— 49 a 63, 34 a 48, 29 a 33, 64 , 1 a 28.
a 14 —— 49 a 32, 15 a 31, 50 a 64. 1 a 14.
a 34 —— 49 a 64, 1 a 33, 46 a 48, 45 a 34.
a 26 —— 49 a 63, 34 a 48, 29 a 33, 64 , 1 a 25, 28 a 26.
a 44 —— 49 a 64, 1 a 32, 47 a 48, 45 a 46, 33 a 44.
a 64 —— 49 a 40, 17 a 8, 39 a 18, 1 a 7, 50 a 64.

Da 7 a 42 —— 7 a 5, 8 a 41, 4 a 1, 64 a 42.
a 20 —— 7 a 1, 64 a 54, 19 a 8, 53 a 20.
a 62 —— 7 a 5, 8 a 59, 4 a 1, 60 a 61, 64 a 62.
a 46 —— 7 a 1, 64 a 49, 8 a 45, 48 a 46
a 48 —— 7 a 6, 47 a 8, 5 a 1, 64 a 48.
a 22 —— 7 a 1, 64 a 40, 21 a 8, 39 a 22.
a 24 —— 7 a 1, 64 a 53, 8 a 18, 23 a 19, 52 a 24.
a 4 —— 7 a 5, 8 a 64, 1 a 4.
a 54 —— 7 a 1, 26 a 53, 8 a 25, 64 a 54.
a 56 —— 7 a 5, 8 a 25, 64 a 60, 57 a 59, 4 a 1, 26 a 56.
a 36 —— 7 a 1, 64 a 40, 37 a 39, 8 a 36.
a 16 —— 7 a 1, 64 a 54, 15 a 8, 53 a 16.
a 28 —— 7 a 1, 64 , 33 a 29, 52 a 34, 63 a 53, 8 a 28.
a 14 —— 7 a 1, 64 a 15, 8 a 14.
a 34 —— 7 a 1, 64 a 46, 33 a 8, 45 a 34.
a 26 —— 7 a 1, 64 a 45, 8 a 25, 44 a 26.

Da 43 a 6 —— 43 a 41, 44 a 49, 40 a 7, 50 a 64, 1 a 6.
a 20 —— 43 a 32, 21 a 24, 31 a 25, 44 a 64, 1 a 20.
a 62 —— 43 a 29, 44 a 61, 28 a 1, 64 a 62.
a 46 —— 43 a 45, 48 a 64, 1 a 42, 47 a 46.
a 48 —— 43 a 41, 44 a 47, 40 a 1, 64 a 48.
a 22 —— 43 a 29, 44 a 64, 23 a 25, 28 a 26, 1 a 22.
a 24 —— 43 a 25, 44 a 64, 1 a 24.
a 4 —— 43 a 32, 7 a 5, 8 a 24, 31 a 25, 44 a 64, 1 a 4.
a 54 —— 43 a 1, 64 a 60, 53 a 44, 59 a 54.
a 56 —— 43 a 44, 59 a 57, 60 a 64, 1 a 42, 47 a 45, 48 a 56.
a 36 —— 43 a 41, 44 a 64, 1 a 21, 40 a 37, 22 a 36.
a 16 —— 43 a 41, 44 a 63, 34 a 40, 17 a 33, 64 , 1 a 16.
a 50 —— 43 a 1, 64 a 53, 44 a 49, 52 a 50.
Da 29 a 42 —— 29 a 41, 44 a 64, 1 a 25, 28 a 26, 43 a 42
a 6 —— 29 a 60, 7 a 28, 61 a 64, 1 a 6.
a 20 —— 29 a 61, 28 a 21, 62 a 64, 1 a 20.
a 62 —— 29 a 61, 28 a 1, 64 a 62
a 46 —— 29 a 42, 47 a 64, 1 a 25, 28 a 26, 43 a 46.
a 22 —— 29 a 64, 23 a 25, 28 a 26, 1 à 22.
a 24 —— 29 a 64, 25 , 28 a 26, 1 a 24.
a 2 —— 29 a 64, 1 , 26 a 28, 25 a 2.
a 4 —— 29 a 64, 1 , 26 a 28, 25 a 8, 5 a 7, 2 a 4.
a 54 —— 29 a 44, 53 a 48, 45 a 47, 26 a 28, 25 a 1, 64 a 54.
Da 59 a 42 —— 59 a 64, 1 a 25, 58 a 43, 26 a 42.
a 6 —— 59 a 8, 5 a 1, 64 a 60, 7 a 6.
a 20 —— 59 a 54, 19 a 1, 64 a 60, 53 a 20.
a 62 —— 59 a 1, 60 a 61, 64 a 62.
a 46 —— 59 a 64, 1 a 25, 58 a 47, 26 a 46.
a 48 —— 59 a 58, 49 a 57, 60 a 64, 1 a 48.
a 22 —— 59 a 53, 60 a 64, 1 a 21, 52 a 22.
Da 27 a 42 —— 27 a 41, 44 a 64, 1 a 26, 43 a 42.
a 6 —— 27 a 31, 26 a 7, 32 a 64, 1 a 6.
a 20 —— 27 a 31, 26 a 21, 32 a 64, 1 a 20.

Da 1 a 2 ——

a 14 —— da 53 a 52

a 64 ——

a 12 —— .... 1 a 11, 64 a 12.

Da 47 a 42 —— da 21 a 20.

a 46 ——

a 14 —— da 60 a 61,

o con dispari, 47 a 45, 48 a 53, 44 a 15, 54 a 64, 1 a 14.

Da 45 a 46 ——

a 8 —— da 45 a 44.

Da 3 a 2 ——

Da 49 a 48 ——

a 4 —— .... 49 a 8, 5 a 7, 50 a 64, 1 a 4.

a 50 ——

a 52 —— da 15 a 14.

a 8 —— .... 49 a 32, 7 a 1, 64 a 50, 31 a 8.

Da 7 a 6 ——

a 2 —— .... 7 a 5, 8 a 64, 1 , 4 a 2.

a 50 —— da 17 a 16.

Da 43 a 42 ——

a 2 —— da 5 a 4.

Da 29 a 48 —— da 56 a 57,

o con dispari, 29 a 47, 26 a 28, 25 a 1, 64 a 48.

1 a 64.
1 a 11, 64 a 12.
1 a 23, 64 a 24.
1 a 25, 64 a 26.
1 a 33, 64 a 34.
1 a 37, 64 a 38.
1 a 61, 64 a 62.
1 , 12 a 64, 11 a 2.
1 a 9, 12 a 64, 11 a 10.
1 a 11, 64 a 17, 12 a 16.
1 a 11, 64 a 41, 12 a 40.
1 a 11, 64 a 53, 12 a 52.
1 a 21, 24 a 64, 23 a 22.
1 a 23, 64 a 31, 24 a 30.
1 a 25, 64 a 43, 26 a 42.
1 a 25, 64 a 47, 26 a 46.
1 , 12 a 64, 11 a 7, 2 a 6.
1 , 12 a 64, 11 a 9, 2 a 8.
1 , 12 a 43, 2 a 11, 64 a 44.
1 a 11, 64 a 17, 12 a 13, 16 a 14.
1 a 11, 64 a 41, 12 a 17, 40 a 18.
1 a 11, 64 a 49, 40 a 12, 41 a 48.
1 a 11, 64 a 53, 12 a 19, 52 a 20.
1 a 11, 64 a 53, 12 a 49, 52 a 50.
1 , 12 a 53, 8 a 2, 9 a 11, 64 a 54.
1 , 12 a 43, 2 a 11, 64 a 59, 44 a 58.
1 a 11, 64 a 37, 14 a 16, 13 a 12, 17 a 36.
1 a 11, 64 a 57, 18 a 40, 17 a 12, 41 a 56.
1 a 11, 64 a 49, 40 a 29, 48 a 41, 12 a 28.
1 a 11, 64 a 53, 12 a 31, 50 a 52, 49 a 32.
1 , 12 a 53, 8 a 2, 9 a 11, 64 a 61, 54 a 60.
1 . . . . 4.

1, 64 a 2.

1, 64 a 7, 2 a 6.

1, 64 a 9, 2 a 8.

1, 64 a 33, 2 a 32.

1, 64 a 43, 2 a 42.

1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 46.

1, 64 a 15, 8 a 2, 9 a 14.

1, 64 a 39, 8 a 2, 9 a 38.

1, 64 a 45, 8 a 2, 9 a 44.

1, 64 a 49, 8 a 2, 9 a 48.

1, 64 a 53, 8 a 2, 9 a 52.

1, 64 a 33, 2 a 15, 32 a 16.

1, 64 a 33, 2 a 21, 32 a 22.

1, 64 a 33, 2 a 29, 32 a 30.

1, 64 a 61, 32 a 2, 33 a 60.

1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 33, 46 a 34.

1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 39, 46 a 40.

1, 14 a 9, 2 a 8, 15 a 64.

1, 64 a 15, 8 a 5, 14 a 9, 2 a 4.

1, 64 a 37, 14 a 9, 2 a 8, 15 a 36.

1, 64 a 45, 8 a 2, 9 a 25, 44 a 26.

1, 64 a 59, 44 a 9, 2 a 8, 45 a 58.

1, 64 a 53, 8 a 2, 9 a 19, 52 a 20.

1, 64 a 53, 8 a 2, 9 a 49, 52 a 50.

1, 64 a 61, 32 a 2, 33 a 53, 60 a 54.

1, 64 a 63, 34 a 46, 33 a 7, 2 a 6, 47 a 62.

1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 17, 40 a 46, 39 a 18.

1, 14 a 11, 64 a 15, 8 a 2, 9 a 10.

1, 14 a 9, 2 a 8, 15 a 23, 64 a 24.

1, 64 a 57, 18 a 39, 46 a 40, 17 a 7, 2 a 6, 47 a 56.

1 . . . . 12.

1 . . . . 28.

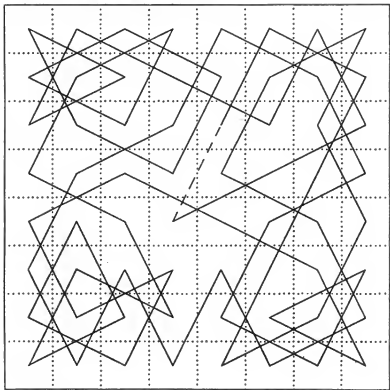
57 a 64, 1 a 56.
57 a 64, 1 a 17, 56 a 18.
57 a 64, 1 a 25, 56 a 26.
57 a 64, 1 a 53, 56 a 54.
57 a 63, 56 a 1, 64.
57 a 64, 1 , 18 a 56, 17 a 2.
57 a 64, 1 a 15, 18 a 56, 17 a 16.
57 a 64, 1 a 17, 56 a 23, 18 a 22.
57 a 64, 1 a 17, 56 a 31, 18 a 30.
57 a 64, 1 a 17, 56 a 49, 18 a 48.
57 , 18 a 56, 17 a 1, 64 a 58.
57 a 64, 1 a 25, 56 a 43, 26 a 42
57 a 64, 1 a 25, 56 a 47, 26 a 46.
57 a 64, 1 a 11, 54 a 56, 53 a 12.
57 a 64, 1 a 19, 54 a 56, 53 a 20.
57 a 61, 54 a 56, 53 a 1, 64 a 62.
57 a 63, 56 a 11, 64 , 1 a 10.
57 a 63, 56 a 25, 64 , 1 a 24.
57 a 63, 56 a 33, 64 , 1 a 32.
57 a 63, 56 a 37, 64 , 1 a 36.
57 a 64, 1 , 18 a 56, 17 a 7, 2 a 6.
57 a 64, 1 , 18 a 56, 17 a 9, 2 a 8
57 a 64, 1 , 18 a 33, 2 a 17, 56 a 34.
57 a 64, 1 , 18 a 43, 2 a 17, 56 a 44.
57 a 64, 1 a 13, 16 a 17, 56 a 18, 15 a 14.
57 a 64, 1 a 15, 18 a 39, 16 a 17, 56 a 40.
57 , 18 a 49, 58 a 64, 1 a 17, 56 a 50.
57 a 64, 1 a 11, 54 a 56, 53 , 12 a 52.
57 a 64. 1 , 18 a 33, 2 a 17, 56 a 39, 34 a 38.
57 a 59, 44 a 56, 17 a 2, 43 a 18, 1 , 64 a 60.
57 . . . . 4.
57 . . . . 28.

57 a 1, 64 a 58.
57 a 25, 58 a 64, 1 a 24
57 a 49, 58 a 64, 1 a 48.
57 a 25, 58 a 64, 1 a 21, 24 a 22.
57 a 31, 24 a 1, 64 a 58, 25 a 30.
57 a 49, 58 a 64, 1 a 45, 48 a 46.
57 a 25, 58 a 64, 1 a 15, 22 a 24, 21 a 16.
57 a 37, 22 a 24, 21 a 1, 64 a 58, 25 a 36.
57 a 49, 58 a 64, 1 a 33, 46 a 48, 45 a 34.
57 a 49, 58 a 64, 1 a 39, 46 a 48, 45 a 40.
57 a 25, 58 a 64, 1 a 13, 16 a 21, 24 a 22, 15 a 14.
57 a 39, 16 a 21, 24 a 22, 15 a 1, 64 a 58, 25 a 38.
57 a 53, 34 a 45, 48 a 46, 33 a 1, 64 a 58, 49 a 52.
57 a 49, 58 a 63, 34 a 45, 48 a 46, 33 a 1, 64.
57 a 49, 58 a 64, 1 a 17, 40 a 45, 48 a 46, 39 a 18.
57 a 49, 58 a 64, 1 a 25, 40 a 45, 48 a 46, 39 a 26.
57 a 25, 58 a 64, 1 , 14 a 15, 22 a 24, 21 a 16, 13 a 2.
57 a 25, 58 a 64, 1 a 5, 14 a 15, 22 a 24, 21 a 16, 13 a 6.
57 a 53, 34 a 45, 48 a 46, 33 a 21, 52 a 49, 58 a 64, 1 a 20.
57 a 53, 34 a 45, 48 a 46, 33 a 29, 52 a 49, 58 a 64, 1 a 28.
57 a 53, 34 a 45, 48 a 46, 33 a 1, 64 a 58, 49 , 52 a 50.
57 a 49, 58 a 63, 34 a 45, 48 a 46, 33 a 11, 64 , 1 a 10.
57 a 49, 58 a 63, 34 a 45, 48 a 46, 33 , 64 , 1 a 32.
57 a 49, 58 a 61, 64 , 1 a 33, 46 a 48, 45 a 34, 63 a 62.
57 , 18 a 39, 46 a 48, 45 a 40, 17 a 1, 64 a 58. 49 a 56.
57 a 49, 58 a 64, 1 a 25, 40 a 43, 26 a 39, 46 a 48, 45 a 44.
57 a 25, 58 a 64, 1 , 14 a 15, 22 a 24, 21 a 16, 13 a 9, 2 a 8.
57 a 43, 2 a 13, 16 a 21, 24 a 22, 15 a 14, 1 , 64 a 58, 25 a 42.
57 , 18 a 39, 46 a 48, 45 a 40, 17 a 1, 64 a 58, 49 a 53, 56 a 54.
57 a 49, 58 a 59, 44 a 45, 48 a 46, 39 a 26, 43 a 40, 25 a 1, 64 a 60.
57. . . . . 4.
57. . . . . 12.

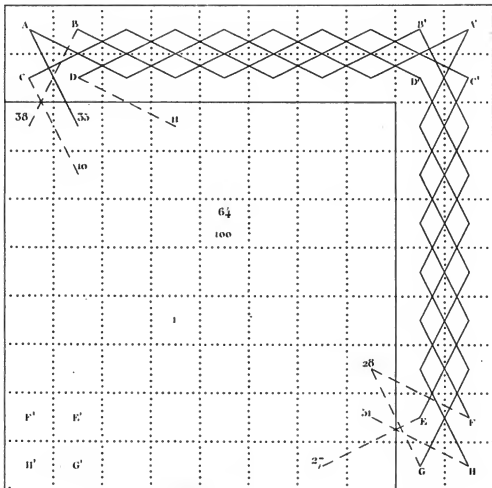
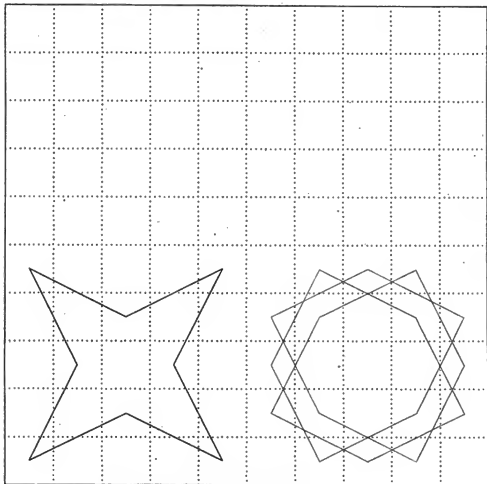
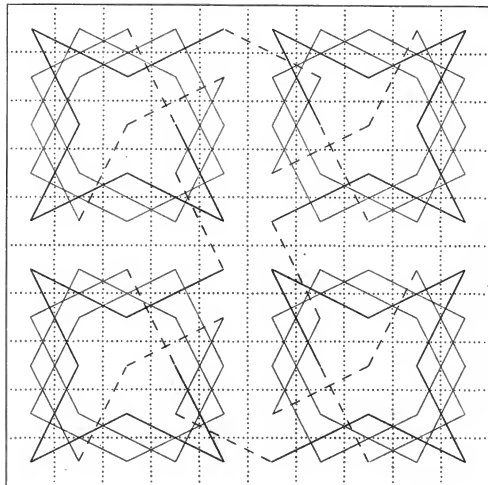
1 a 64.
1 a 11, 64 a 12.
1 , 12 a 64, 11 a 2.
1 , 12 a 64, 11 a 7, 2 a 6.
1 , 12 a 47, 6 a 2, 7 a 11, 64 a 48.
1 , 12 a 29, 48 a 64, 11 a 7, 2 a 6, 47 a 30.
1 a 23, 64 a 24.
1 a 21, 24 a 64, 23 a 22.
1 a 15, 22 a 23, 64 a 24, 21 a 16.
1 a 13, 16 a 21, 24 a 64, 23 a 22, 15 a 14.
1 a 13, 16 a 21, 24 a 37, 14 a 15, 22 a 23, 64 a 38.
1 a 25, 64 a 26.
1 a 25, 64 a 43, 26 a 42.
1 a 25, 64 a 47, 42 a 26, 43 a 46.
1 a 25, 64 a 47, 42 a 33, 46 a 43, 26 a 32.
1 a 7, 32 a 26, 43 a 46, 33 a 42, 47 a 64, 25 a 8.
1 a 7, 32 a 26, 43 a 46, 33 a 39, 8 a 25, 64 a 47, 42 a 40.
1 a 7, 32 a 26, 43 a 46, 33 a 39, 8 a 17, 40 a 42, 47 a 64, 25 a 18.
1 a 7, 32 a 26, 43 a 46, 33 a 39, 8 a 17, 40 a 42, 47 a 49, 18 a 25, 64 a 50.
1 a 33, 64 a 34.
1 a 33, 64 a 53, 34 a 52.
1 a 19, 52 a 34, 53 a 64, 33 a 20.
1 a 61, 64 a 62.
1 a 9, 12 a 64, 11 a 10.
1 , 12 a 43, 2 a 11, 64 a 44.
1 , 12 a 43, 2 a 11, 64 a 59, 44 a 58.
1 a 25, 64 a 61, 32 a 26, 43 a 46, 33 a 42, 47 a 60.
1 a 25, 64 a 61, 32 a 26, 43 a 46, 33 a 42, 47 a 53, 60 a 54.
1 . . . . 4.
1 . . . . 28.
1 . . . . 36.
1 . . . . 56.

1, 64 a 2.
1, 64 a 7, 2 a 6.
1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 46.
1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 33, 46 a 34.
1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 21, 34 a 46, 33 a 22.
1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 15, 22 a 33, 46 a 34, 21 a 16.
1, 64 a 47, 6 a 2, 7 a 13, 16 a 21, 34 a 46, 33 a 22, 15 a 14.
1, 64 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 33, 46 a 34, 21 a 16, 13 a 7, 2 a 4.
1, 64 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 33, 46 a 41, 4 a 2, 7 a 13, 16 a 21, 34 a 40.
1, 64 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 33, 46 a 41, 4 a 2, 7 a 13, 16 a 17, 40 a 34, 21 a 18.
1, 64 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 33, 18 a 21, 34 a 40, 17 a 16, 13 a 7, 2 a 4, 41 a 46, 33 a 24.
1, 64 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 23, 18 a 21, 34 a 40, 17 a 16, 13 a 7, 2 a 4, 41 a 46, 33 a 31, 24 a 30.
1, 64 a 9, 2 a 8.
1, 64 a 39, 8 a 2, 9 a 38.
1, 64 a 33, 2 a 32.
1, 64 a 61, 32 a 2, 33 a 60.
1, 64 a 61, 32 a 27, 60 a 33, 2 a 26.
1, 64 a 61, 32 a 27, 60 a 43, 26 a 2, 33 a 42.
1, 64 a 53, 34 a 46, 33 a 7, 2 a 6, 47 a 52.
1, 64 a 53, 34 a 46, 33 a 21, 52 a 47, 6 a 2, 7 a 20.
1, 64 a 63, 34 a 46, 33 a 7, 2 a 6, 47 a 62.
1, 64 a 49, 4 a 2, 7 a 13, 16 a 21, 34 a 46, 33 a 22, 15 a 14, 5 a 6, 47 a 48.
1, 64 a 49, 4 a 2, 7 a 13, 16 a 21, 34 a 46, 33 a 29, 48 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 28.
1, 64 a 59, 4 a 2, 7 a 13, 16 a 21, 34 a 46, 33 a 22, 15 a 14, 5 a 6, 47 a 58.
1, 64 a 59, 4 a 2, 7 a 13, 16 a 21, 34 a 46, 33 a 22, 15 a 14, 5 a 6, 47 a 49, 58 a 50.
1, 64 a 57, 18 a 21, 34 a 40, 17 a 16, 13 a 7, 2 a 4, 41 a 46, 33 a 22, 15 a 14, 5 a 6, 47 a 56.
1, 64 a 57, 18 a 21, 34 a 40, 17 a 16, 13 a 7, 2 a 4, 41 a 46, 33 a 22. 15 a 14, 5 a 6, 47 a 53, 56 a 54.
1, 64 a 57, 18 a 21, 34 a 40, 17 a 16, 13 a 11, 54 a 56, 53 a 47, 6 a 5, 14 a 15, 22 a 33, 46 a 41, 4 a 2, 7 a 10.
1, 64 a 45, 8 a 2, 9 a 44.
1 . . . . 12.
1 . . . . 36.

Cav: degli Scacchi. March: Teodoro Ciccolini. T.ª 19.

Cav: degli Scacchi. March: Teodoro Ciccolini. T.ª 20.

10	7	14	17	42	63	4	55
15	18	9	6	13	54	41	62
8	11	16	43	64	5	56	3
19	44	31	12	53	2	61	40
30	25	20	1	32	39	52	57
45	22	47	28	49	60	33	36
26	29	24	21	38	35	58	51
23	46	27	48	59	50	37	34

Cim: degli Scarchi, March: Teodoro Ciccolini. T.a 21.

A
B
B'
A'
C
D
D'
C'
38
35
11
10
64
100
1
28
31
E
F
27
G
H
F'
E'
H'
G'

78	95	84	89	76	57	62	67	72	55
85	90	77	94	99	68	75	56	61	66
96	79	98	83	88	63	58	73	54	71
91	86	81	100	93	74	69	52	65	60
80	97	92	87	82	51	64	59	70	53
3	20	9	14	1	32	37	42	47	30
10	15	2	19	24	43	50	31	36	41
21	4	23	8	13	38	33	48	29	46
16	11	6	25	18	49	44	27	40	35
5	22	17	12	7	26	39	34	45	28